

METRON

RIVISTA INTERNAZIONALE DI STATISTICA — REVUE INTERNATIONALE DE STATISTIQUE
INTERNATIONAL REVIEW OF STATISTICS — INTERNATIONALE STATISTISCHE ZEITSCHRIFT

DIRETTORE PROPRIETARIO — DIRECTEUR ET PROPRIÉTAIRE
EDITOR AND PROPRIETOR — HERAUSGEBER UND EIGENTHÜMER

Prof. Dott. Corrado Gini, direttore dell'Istituto di Statistica e Politica Economica della
R. Università di Roma, presidente dell'Istituto Centrale di Statistica del Regno d'Italia

COMITATO DIRETTIVO — COMITÉ DE DIRECTION
EDITORIAL COMMITTEE — DIREKTION-KOMITEE

Prof. A. Andréadès (Athènes) — **Prof. A. E. Bunge** (Buenos Ayres) — **Prof. F. P. Cantelli** (Roma)
Prof. C. V. L. Charlier (Lund) — **Prof. F. v. Fellner** (Budapest) — **Prof. A. Flores de Lemus** (Madrid)
Prof. M. Greenwood (London) — **Sir G. H. Knibbs** (Melbourne) — **Ing. L. March** (Paris)
Prof. A. W. Methorst (La Haye) — **Prof. A. Julin** (Bruxelles) — **Prof. R. Pearl** (Baltimore)
Prof. H. Westergaard (Copenhagen)

AMMINISTRATORE — ADMINISTRATEUR — MANAGER — VERWALTER

Dott. Silvio Orlandi, Istituto di Statistica e Politica Economica della R. Università di Roma.

SEGRETARI DI REDAZIONE — SECRÉTAIRES DE RÉDACTION
EDITORIAL SECRETARIES — REDACTIONSSECRÉTAIRE

Prof. Luigi Galvani — **Dott. Mario Saibante**

Vol. VII. N. 3.

30 - VI - 1928.

SOMMARIO — SOMMAIRE — CONTENTS — INHALT

V. Romanowsky. <i>On the criteria that two given samples belong to the same normal population</i>	pag. 3
C. Jordan. <i>Sur une formule d'interpolation dérivée de la formule d'Everett</i>	» 47
G. Carega. <i>Alcuni dati demografici sugli Esquimesi</i>	» 52
A. Andréadès. <i>La population de l'Attique aux V^e et IV^e siècles</i>	» 112
F. A. Woods. <i>Aristocracies and mental evolution or social « conifiration »</i>	» 121
<i>Riunioni e congressi.</i>	» 143

ROMA

AMMINISTRAZIONE DEL « METRON »
R. UNIVERSITÀ — ISTITUTO DI STATISTICA
:: :: E POLITICA ECONOMICA :: :: ::

ARTICOLI GIUNTI ALLA RIVISTA
CHE VERRANNO PUBBLICATI NEI
PROSSIMI NUMERI.

(*Secondo l'ordine d'arrivo*).

ARTICLES REÇUS PAR LA REVUE
ET À PARAÎTRE PROCHAINEMENT.

(*D'après la date de reception*).

ARTIKEL DIE AN DIE ZEITSCHRIFT ANGELANGT
SIND UND WELCHE IN DEN NACHFOLGENDEN
NUMMERN ERSCHEINEN WERDEN.

(*Nach der Reihenfolge des Eingangs*).

ARTICLES RECEIVED BY THE REVIEW WHICH
WILL BE PUBLISHED IN FUTURES ISSUES.

(*According to date of receipt*).

C. Craig. *An application of Thiele's semi-invariants to the sampling problem.*

Ernst Waizner. *Das Volkseinkommen Alt-Oesterreichs und seine Verteilung auf die Nachfolgestaaten.*

C. Loy-Prunas - C. Sequi-Caput. *La popolazione studentesca dell'Università di Cagliari dalle origini ai nostri giorni.*

Gli Autori degli articoli inviati per la pubblicazione nella Rivista, rinunciano in favore della medesima alla proprietà letteraria degli articoli stessi, qualora vengano pubblicati.

Les Auteurs des articles envoyés à la Revue pour y être publiés, renoncent, en faveur de celle-ci, à la propriété littéraire de leurs articles, s'ils sont acceptés.

The Authors of papers sent for publications in the Review are supposed to give up their copyright in favour of the Review if the papers are published.

Die Verfasser der zur Veröffentlichung in der Zeitschrift zugesandten Aufsätze, werden, falls selbige veröffentlicht werden, auf ihre Verfasserrrechte zu Gunsten der Zeitschrift verzichten müssen.

V. ROMANOWSKY

On the criteria that two given samples belong to the same normal population

(On the different coefficients of racial likeness)

I. Partial coefficients.

1. *Introductory.* It is well known to all biometricians for the solution of what problem are constructed by Prof. K. PEARSON the coefficients a and L of racial likeness (see e. g., his last paper on this subject: *On the coefficient of racial likeness*, « Biometrika », vol. XVIII, p. 105-118). We shall put this problem in the following form abstracting from its particular relation to the antropology.

Let be given two random samples with random variables

$$x_1, x_2, \dots x_v$$

the different values of which we shall denote with

$$x_{i1}, x_{i2}, \dots x_{in} \quad (i = \overline{1, v})$$

for the first sample and with

$$x'_{i1}, x'_{i2}, \dots x'_{im} \quad (i = \overline{1, v})$$

for the second supposing that the sizes of the samples are n and m . We shall suppose further that the variables x_i are independent and normally distributed in an *unknown* general population S .

The problem consists now in the recognition, if our two samples, say S_1 and S_2 , do belong to S , i. e. if they be two random samples taken from S .

For the solution of this problem different coefficients may be constructed. We shall divide them in partial and total coefficients of samples belonging — we shall allways mean: to the same ge-

neral population (1). The partial coefficients are constructed for the separate variables x_i and the total ones — for the set x_i ($i = \overline{1, v}$) of these variables.

We shall construct in the following paragraphs different partial and total coefficients of samples belonging, shorter: belonging coefficients, and investigate them. This investigation shall consist chiefly in the research of their distributions in samples like S_1 and S_2 . The theory of such coefficients is far from being perfect. I think that this paper will serve to some advancement of this theory the importance of which for statistics is evident.

2. *On an integral.* We shall consider here an integral which will be of great use in the following paragraphs. It is

$$(1) \quad I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p \sum u^2 - p' \sum v^2 - 2q \sum uu' - 2q' \sum vv' + 2a \sum u + 2a' \sum v} dU dV$$

where

$$\begin{aligned} \sum u^2 &= \sum_{i=1}^n u_i^2, & \sum u &= \sum_{i=1}^n u_i, & \sum uu' &= \sum_{j=i+1}^n \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_j \\ \sum v^2 &= \sum_{g=1}^m v_g^2, & \sum v &= \sum_{g=1}^m v_g, & \sum vv' &= \sum_{h=g+1}^m \sum_{g=1}^{m-1} v_g v_h \end{aligned}$$

$$dU = du_1 du_2 \dots du_n, \quad dV = dv_1 dv_2 \dots dv_m$$

and the integration is to be performed in respect to every variable from $-\infty$ to $+\infty$. We shall suppose that the constants p, p', q, q' are satisfying the conditions necessary for the existence of $I(\alpha, \beta)$. These conditions are:

$$(2) \quad \begin{aligned} p &> 0, & p &> q, & p + (n-1)q &> 0 \\ p' &> 0, & p' &> q', & p' + (m-1)q' &> 0 \end{aligned}$$

Then, whatever constants a and a' may be, $I(\alpha, \beta)$ will be a definite number and can be evaluated by the repeated application of the well known formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + 2bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/a},$$

where $a > 0$ and b is arbitrary.

(1) It would be more convenient to replace the word «population» with «statistical set» or «statistical multiplicity» as more abstracted terms.

We receive in this manner

$$(3) \quad I(\alpha, f) = \frac{(\sqrt{\pi})^{n+m}}{\sqrt{(p-q)^{n-1}(p+n-1q)(p'-q')^{m-1}(p'+m-1q')}} e^{\frac{na^2}{p+n-1q} + \frac{ma'^2}{p'+m-1q'}}$$

This result can be established by the algebra quite analogous to that which the reader can find in the author's paper: *On the moments of standard deviations and of correlation coefficient in samples from normal population*, «Metron» vol. V, N. 4, 1925, § 2, and which is applied there to the evaluation of a somewhat less general integral.

3. *The distribution of the partial belonging coefficient α_1 of Prof. K. PEARSON.* Take now one of the variables x_1, x_2, \dots, x_v , which we shall denote simply with x . Let samples S_1 and S_2 give the values

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \text{and} \quad x'_1, x'_2, \dots, x'_m$$

for this variable. Then the coefficient proposed by Prof. K. PEARSON as a partial belonging coefficient is

$$(4) \quad \alpha_1 = \frac{(\bar{x} - \bar{x}')^2}{\frac{\bar{\mu}}{n} + \frac{\bar{\mu}'}{m}},$$

where

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, & \bar{\mu} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \\ \bar{x}' &= \frac{1}{m} \sum_{h=1}^m x'_h, & \bar{\mu}' &= \frac{1}{m} \sum_{h=1}^m (x'_h - \bar{x}')^2. \end{aligned}$$

We shall suppose that the variable x is normally distributed in the general population S with the mean x_0 and the variance $\sigma^2 = \mu$ and then consider the distribution of α in samples like S_1 and S_2 ,

For this aim let us find the generating function of the moments

$$(5) \quad M_{kl} = E \left[(\bar{x} - \bar{x}')^k \left(\frac{\bar{\mu}}{n} + \frac{\bar{\mu}'}{m} \right)^l \right] \\ (k, l = 0, 1, 2, \dots, \text{to infinity}),$$

E being, as usually, the sign of mathematical expectation. Denoting it with $\varphi(\alpha, \beta)$ we shall find it from the equation

$$(6) \quad \varphi(\alpha, \beta) = \lambda^s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta + \alpha(\bar{x} - \bar{x}') + \beta\left(\frac{\bar{\mu}}{n} + \frac{\bar{\mu}'}{m}\right)} dX dX',$$

where

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}}, \quad s = n + m,$$

$$\theta = \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2 + \frac{1}{2\mu} \sum_{h=1}^m (x'_h - x_0)^2,$$

$$dX = dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad dX' = dx'_1 dx'_2 \dots dx'_m$$

and the integration in respect to every variable is to be performed from $-\infty$ to $+\infty$. Indeed, it is clear that

$$M_{kl} = \left[\frac{d^{k+l} \varphi}{d\alpha^k d\beta^l} \right]_{\beta=\alpha=0}.$$

It is not difficult to find $\varphi(\alpha, \beta)$ by means of (3), but we shall find at first a slightly more general function, namely

$$(7) \quad \varphi_1(\alpha, \beta) = \lambda^s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta + \alpha\varrho(\bar{x} - \bar{x}') + \beta(\tau\Sigma + \tau'\Sigma')} dX dX',$$

where ϱ, τ, τ' are some constants and

$$\Sigma = \Sigma(x - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

$$\Sigma' = \Sigma(x' - \bar{x}')^2 = \sum_{h=1}^m (x'_h - \bar{x}')^2.$$

Putting

$$u = x - x_0, \quad v = x' - x_0$$

and remarking that

$$\Sigma = \Sigma u^2 - \frac{1}{n} (\Sigma u)^2 = \frac{n-1}{n} \Sigma u^2 - \frac{2}{n} \Sigma uu',$$

$$\Sigma' = \Sigma v^2 - \frac{1}{m} (\Sigma v)^2 = \frac{m-1}{m} \Sigma v^2 - \frac{2}{m} \Sigma vv',$$

we can bring the multiple integral (7) into the form (1), if we denote :

$$(8) \quad \begin{aligned} p &= \frac{1}{2\mu} - \frac{n-1}{n} \beta\tau, & q &= \frac{1}{n} \beta\tau; \\ p' &= \frac{1}{2\mu} - \frac{m-1}{m} \beta\tau', & q' &= \frac{1}{m} \beta\tau'; \\ a &= \frac{1}{2n} \alpha_Q, & a' &= -\frac{1}{2m} \alpha_Q. \end{aligned}$$

It is not difficult to verify that the conditions (2) are satisfied for α and β sufficiently small and, therefore, we may write

$$\varphi_1(\alpha, \beta) = \frac{\lambda^s (\sqrt{\pi})^s}{\sqrt{(p-q)^{n-1}(p+n-1q)(p'+m-1q')(p'-q')^{m-1}}} e^{\frac{na^2}{p+n-1q} + \frac{ma'^2}{p'+m-1q'}}$$

But, for the values (8),

$$\begin{aligned} p - q &= \frac{1}{2\mu} - \beta\tau, & p' - q' &= \frac{1}{2\mu} - \beta\tau'; \\ p + \overline{n-1}q &= p' + \overline{m-1}q' = \frac{1}{2\mu}; \\ \frac{na^2}{p+n-1q} + \frac{ma'^2}{p'+m-1q'} &= 2\mu \left[\frac{Q^2 \alpha^2}{4n} + \frac{Q'^2 \alpha'^2}{4m} \right] = \frac{Q^2 \mu s \alpha^2}{2nm}, \end{aligned}$$

and thus

$$(9) \quad \varphi_1(\alpha, \beta) = (1 - 2\mu\beta\tau)^{-\frac{n-1}{2}} (1 - 2\mu\beta\tau')^{-\frac{m-1}{2}} e^{\frac{Q^2 \mu s \alpha^2}{2nm}}.$$

Putting here $Q = 1$, $\sigma = 1/n^2$, $\sigma' = 1/m^2$, we shall have

$$(10) \quad \varphi(\alpha, \beta) = \left(1 - \frac{2\mu\beta}{n^2}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{2\mu\beta}{m^2}\right)^{-\frac{m-1}{2}} e^{\frac{\mu s \alpha^2}{2nm}}$$

This is the generating function of the moments M_{kl} , which can be now easily calculated. But we have the aim to find the distribution $D(\alpha_1)$ of the coefficient α_1 , denoting generally with $D(u, v, \dots)$ the distribution function of any random variable u, v, \dots , that is a function $D(u, v, \dots)$ such that $D(u, v, \dots) du dv$ represents the probability for our variables to lie in the infinitesimal intervals $(u, u + du), (v, v + dv), \dots$

If we put

$$\xi = \bar{x} - \bar{x}', \quad \eta = \frac{\bar{\mu}}{n} + \frac{\bar{\mu}'}{m},$$

the distribution $D(\alpha_1)$ can be found, if we know the distribution $D(\xi, \eta)$ of ξ and η and this last is the distribution having M_{kl} for its moments. Let us write

$$\varphi(\alpha, \beta) = G[D(\xi, \eta)]$$

symbolizing in this manner that $\varphi(\alpha, \beta)$ is the generating function of the moments of $D(\xi, \eta)$.

Now $D(\xi, \eta)$ is defined, as we see, by the integral equation

$$(11) \quad \varphi(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} D(\xi, \eta) e^{\alpha\xi + \beta\eta} d\eta$$

and we shall go to solve this equation.

First of all we remark that ξ and η are independent, as it follows from the expression (10) of $\varphi(\alpha, \beta)$. Indeed, this expression is of the form $\varphi_1(\alpha)\varphi_2(\beta)$, so that α and β are separated therein, and therefore we see immediately that

$$M_{kl} = M_{k0} \cdot M_{0l} \quad \text{for } k, l = 0, 1, 2, \dots$$

what is possible only when ξ and η are independent.

Thus we can write

$$\varphi(\alpha, \beta) = \varphi_1(\alpha)\varphi_2(\beta), \quad D(\xi, \eta) = D_1(\xi)D_2(\eta)$$

and find $D_1(\xi)$, $D_2(\eta)$ from the equations

$$(12) \quad \varphi_1(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} D_1(\xi) e^{\alpha\xi} d\xi,$$

$$(13) \quad \varphi_2(\beta) = \int_0^{\infty} D_2(\eta) e^{\beta\eta} d\eta$$

where

$$(14) \quad \varphi_1(\alpha) = e^{\frac{ms\alpha^2}{2nm}}, \quad \varphi_2(\beta) = \left(1 - \frac{2\mu\beta}{n^2}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{2\mu\beta}{m^2}\right)^{-\frac{m-1}{2}}.$$

The equation (12) is solved immediately by means of the relation

$$\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + \alpha x} dx = e^{\alpha^2/4a}$$

($a > 0$) and we receive

$$(15) \quad D_1(\xi) = \sqrt{\frac{nm}{2\mu s\pi}} e^{-nm\xi^2/2\mu s}.$$

As to the solution of (13) we write it, according (14),

$$\left(1 - \frac{2\mu\beta}{n^2}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{2\mu\beta}{m^2}\right)^{-\frac{m-1}{2}} = \int_0^\infty D_2(\eta) e^{\beta\eta} d\eta$$

and, supposing $n \neq m$, proceed in the following manner. The equations

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2\mu\beta}{n^2}\right)^{-\frac{n-1}{2}} &= \int_0^\infty D_{21}(\eta) e^{\beta\eta} d\eta, \\ \left(1 - \frac{2\mu\beta}{m^2}\right)^{-\frac{m-1}{2}} &= \int_0^\infty D_{22}(\eta) e^{\beta\eta} d\eta \end{aligned}$$

can be easily solved and their solutions will be (see my paper in «Metron», vol. V, N. 4, § 3)

$$\begin{aligned} D_{21}(\eta) &= \frac{(n^2/2\mu)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \eta^{\frac{n-3}{2}} e^{-n^2\eta/2\mu} \\ D_{22}(\eta) &= \frac{(m^2/2\mu)^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \eta^{\frac{m-3}{2}} e^{-m^2\eta/2\mu} \end{aligned}$$

or

$$(16) \quad D_{21}(\eta) = \frac{B^b}{\Gamma(b)} \eta^{b-1} e^{-B\eta}, \quad D_{22}(\eta) = \frac{B_1^{b_1}}{\Gamma(b_1)} \eta^{b_1-1} e^{-B_1\eta},$$

putting for brevity

$$(17) \quad B = n^2/2\mu, \quad b = \frac{n-1}{2}; \quad B_1 = m^2/2\mu, \quad b_1 = \frac{m-1}{2}.$$

We can write now

$$\varphi_2(\beta) = \frac{B^b B_1^{b_1}}{\Gamma(b) \Gamma(b_1)} \int_0^\infty \int_0^\infty \eta_1^{b-1} \eta_2^{b_1-1} e^{-B\eta_1 - B_1\eta_2 + \beta(\eta_1 + \eta_2)} d\eta_1 d\eta_2$$

or, putting $\eta_1 + \eta_2 = \eta$,

$$\varphi_2(\beta) = \frac{B^b B_1^{b_1}}{\Gamma(b) \Gamma(b_1)} \int_0^\infty e^{\beta \eta} d\eta \int_0^\eta \eta_1^{b-1} (\eta - \eta_1)^{b_1-1} e^{-B\eta_1 - B_1(\eta - \eta_1)} d\eta_1$$

Comparing this with (13) we see at once that

$$D_2(\eta) = \frac{B^b B_1^{b_1}}{\Gamma(b) \Gamma(b_1)} e^{-B_1 \eta} \int_0^\eta \eta_1^{b-1} (\eta - \eta_1)^{b_1-1} e^{-(B-B_1)\eta_1} d\eta_1$$

and it remains only to evaluate the integral on the right side what can be easily made by means of the substitution $\eta_1 = \eta t$:

$$\begin{aligned} & \int_0^\eta \eta_1^{b-1} (\eta - \eta_1)^{b_1-1} e^{-(B-B_1)\eta_1} d\eta_1 = \\ &= \eta^{b+b_1-1} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{b_1-1} e^{-(B-B_1)\eta t} dt \\ &= \eta^{b+b_1-1} \psi(\eta). \end{aligned}$$

Here

$$\begin{aligned} \psi(\eta) &= \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{b_1-1} e^{-(B-B_1)\eta t} dt \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (B-B_1)^p}{p!} \eta^p \int_0^1 t^{b+p-1} (1-t)^{b_1-1} dt \end{aligned}$$

or

$$(18) \quad \psi(\eta) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (B-B_1)^p}{p!} \frac{\Gamma(b_1) \Gamma(b+p)}{\Gamma(b+b_1+p)} \eta^p.$$

Thus

$$D_2(\eta) = \frac{B^b B_1^{b_1}}{\Gamma(b) \Gamma(b_1)} \eta^{b+b_1-1} e^{-B_1 \eta} \psi(\eta)$$

and accordingly

$$(19) \quad D(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \frac{B^b B_1^{b_1}}{\Gamma(b) \Gamma(b_1)} \eta^{b+b_1-1} e^{-A\xi^2 - B_1 \eta} \psi(\eta)$$

($A = nm / 2 \mu s$).

This is an asymmetrical in regard to B and B_1 form of $D(\xi, \eta)$. We can receive two symmetrical ones writing $D_2(\eta)$ in two fol-

lowing forms :

$$D_2(\eta) = \frac{B^b B_1^{b_1}}{\Gamma(b) \Gamma(b_1)} \eta^{b+b_1-1} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{b_1-1} e^{-B\eta t - B_1\eta(1-t)} dt$$

$$D_2(\eta) = \frac{B^b B_1^{b_1}}{\Gamma(b) \Gamma(b_1)} \eta^{b+b_1-1} e^{-(B+B_1)\eta} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{b_1-1} e^{-B\eta t - B_1\eta(1-t)} dt.$$

We find therefrom

$$(20) \quad D_2(\eta) = \frac{B^b B_1^{b_1}}{\Gamma(b) \Gamma(b_1)} \eta^{b+b_1-1} \psi_1(\eta),$$

$$D_2(\eta) = \frac{B^b B_1^{b_1}}{\Gamma(b) \Gamma(b_1)} \eta^{b+b_1-1} e^{-(B+B_1)\eta} \Psi(\eta),$$

putting

$$(21) \quad \psi_1(\eta) = \sum_{p=0}^{\infty} c_{1p} \eta^p, \quad \Psi(\eta) = \sum_{p=0}^{\infty} C_p \eta^p,$$

$$c_{1p} = (-1)^p \sum_{h=0}^p \frac{\Gamma(b+h) \Gamma(b_1+p-h)}{\Gamma(b+b_1+p)} \frac{B^h (p-h)!}{h! B_1^{p-h}}$$

$$C_p = \sum_{h=0}^p \frac{\Gamma(b+h) \Gamma(b_1+p-h)}{\Gamma(b+b_1+p)} \frac{B_1^h B^{p-h}}{h! (p-h)!}.$$

Let us remark that the functions $\psi(\eta)$, $\psi_1(\eta)$ and $\Psi(\eta)$ are, as it is easy to show, integral transcendental functions.

Let us now find the distribution $D(u)$ of $u = \frac{\xi}{\sqrt{\eta}}$, taking, for example, $D(\xi, \eta)$ in the form

$$(22) \quad D(\xi, \eta) = K e^{-A\xi^2 - C\eta} \eta^{c-1} \Psi(\eta)$$

$$(K = \frac{B^b B_1^{b_1}}{\Gamma(b) \Gamma(b_1)}, \quad C = B + B_1, \quad c = b + b_1)$$

It is clear that

$$D(u) = \int_0^{\infty} D(u\sqrt{\eta}, \eta) \sqrt{\eta} d\eta$$

$$= K \int_0^{\infty} e^{-(Au^2 + C)\eta} \eta^{c-\frac{1}{2}} \Psi(\eta) d\eta$$

$$= K \sum_{p=0}^{\infty} C_p \int_0^{\infty} \eta^{c+p-\frac{1}{2}} e^{-(Au^2 + C)\eta} d\eta$$

wherefrom

$$(23) \quad D(u) = K(Au^2 + C)^{-\left(c + \frac{1}{2}\right)} \sum_{p=0}^{\infty} C_p \Gamma\left(c + p + \frac{1}{2}\right) (Au^2 + C)^{-p}$$

Now, putting $\alpha_1 = u^2$, we must have $D(\alpha_1) d\alpha_1 = D(u) du$ wherefrom $D(\alpha_1) = D(u) / 2\sqrt{\alpha_1}$, that is

$$(24) \quad D(\alpha_1) = \frac{1}{2} K(A\alpha_1 + C)^{-\left(c + \frac{1}{2}\right)} \alpha_1^{-\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} C_p \Gamma\left(c + p + \frac{1}{2}\right) (A\alpha_1 + C)^{-p}$$

This is the distribution of the Prof. K. PEARSON's partial belonging coefficient α_1 for samples taken from a normal population.

Parting from other two forms of $D(\xi, \eta)$ we easily receive

$$(25) \quad \begin{aligned} D(u) &= K(Au^2 + B_1)^{-\left(c + \frac{1}{2}\right)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (B - B_1)^p}{p!} \frac{\Gamma(b_1) \Gamma(b + p)}{\Gamma(c + p)} \frac{\Gamma\left(c + p + \frac{1}{2}\right)}{(Au^2 + B_1)^p} \\ &= B^b B_1^{b_1} \sqrt{\frac{A}{\pi}} \frac{\Gamma\left(c + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(c)} (Au^2 + B_1)^{-\left(c + \frac{1}{2}\right)} F\left(b, c + \frac{1}{2}, c, -\frac{B - B_1}{Au^2 + B_1}\right) \end{aligned}$$

F being the sign of a hypergeometrical function, and

$$(26) \quad D(u) = K(Au^2)^{-\left(c + \frac{1}{2}\right)} \sum_{p=0}^{\infty} c_{1p} \Gamma\left(c + p + \frac{1}{2}\right) A^{-p} u^{-2p}$$

Therefore

$$(27) \quad \begin{aligned} D(\alpha_1) &= \frac{1}{2} B^b B_1^{b_1} \sqrt{\frac{A}{\pi}} \frac{\Gamma\left(c + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(c)} (A\alpha_1 + B_1)^{-\left(c + \frac{1}{2}\right)} \alpha_1^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad F\left(b, c + \frac{1}{2}, c, -\frac{B - B_1}{A\alpha_1 + B_1}\right), \\ D(\alpha_1) &= \frac{1}{2} K A^{-\left(c + \frac{1}{2}\right)} \alpha_1^{-(c+1)} \sum_{p=0}^{\infty} c_{1p} \Gamma\left(c + p + \frac{1}{2}\right) (A\alpha_1)^{-p}. \end{aligned}$$

We remark that the distribution of α_1 is too complicate for pratical aims and, therefore, α_1 must be replaced by some more manageable coefficient of samples belonging. Two such coefficients will be considered in the subsequent paragraphs.

4. *On the distribution $D(u)$.* In certain regards the distribution of $u = \xi / \sqrt{\eta} = (\bar{x} - \bar{x}') / \sqrt{\frac{\bar{u}}{n} + \frac{\bar{u}'}{m}}$ is simpler than the distribution of $\alpha_1 = u^2$ and we shall now shortly expose some results which can be established for $D(u)$.

We shall begin with research of the moments of $D(u)$ and take the form (25) as leading to the presentation of these moments in more familiar forms.

We remark at first that all odd moments of u are zero, $D(u)$ being an even function of u . Denoting the moments of u with U_h ($h = 0, 1, 2, \dots$), so that

$$U_h = E(u^h) = \int_{-\infty}^{\infty} u^h D(u) du$$

and basing on the relation

$$(28) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{2g} du}{(A u^2 + B_1)^{1/2}} = \frac{(2g)!}{2^{2g} \cdot g!} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu - 2g - 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{\sqrt{\pi}}{A^{\frac{2g+1}{2}} B_1^{\frac{\nu-2g-1}{2}}}$$

(g, ν — positive integers, $\nu - 2g \geq 2$) we find, after some not difficult algebra, for the even moments of u the expressions:

$$U_{2g} = \frac{(2g)!}{2^{2g} \cdot g!} \left(\frac{B_1}{A}\right)^g \left(\frac{B}{B_1}\right)^b \frac{\Gamma(c-g)}{\Gamma(c)} F\left(b, c-g, c, -\frac{B-B_1}{B_1}\right)$$

or, returning to the first notations

$$(29) \quad U_{2g} = \frac{(2g)!}{2^{2g} \cdot g!} \left(\frac{ms}{n}\right)^g \left(\frac{n}{m}\right)^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} - g - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right)} \cdot F\left(\frac{n-1}{2}, \frac{s}{2} - g - 1, \frac{s}{2} - 1, \frac{m^2 - n^2}{n^2}\right).$$

We would receive also this value of U_{2g} , if we found $E(\xi^{2g} \eta^{-g})$ by means of (19). And we see that U_{2g} are finite only for $s - 2g \geq 2$.

Let us examine now the ratio U_{2g}/U_2^g for indefinitely increasing n and m . We can write, applying the well known transformations of hypergeometrical functions:

$$\begin{aligned} \frac{U_{2g}}{U_2^g} &= \frac{(2g)!}{2^g \cdot g!} \left(\frac{B}{B_1}\right)^{(1-g)b} \frac{\Gamma(c-g)}{\Gamma(c)} \frac{\Gamma^g(c)}{\Gamma^g(c-1)} \frac{F\left(b, c-g, c, -\frac{B-B_1}{B_1}\right)}{F^g\left(b, c-1, c, -\frac{B-B_1}{B_1}\right)} \\ &= \frac{(2g)!}{2^g \cdot g!} \left(\frac{B}{B_1}\right)^{(1-g)b} \frac{(c-1)^g}{(c-1)(c-2)\dots(c-g)} \frac{(B/B_1)^{g-b} F\left(b_1, g, c, \frac{B}{B_1}\right)}{(B/B_1)^{(1-b)g} F^g\left(b_1, 1, c, \frac{B}{B_1}\right)} \\ &= \frac{(2g)!}{2^g \cdot g!} \frac{(c-1)^g}{(c-1)(c-2)\dots(c-g)} \frac{F(b_1, g, c, B/B_1)}{F^g(b_1, 1, c, B/B_1)}. \end{aligned}$$

Suppose now that for $n \rightarrow \infty$ and $m \rightarrow \infty$ we have $n/m \rightarrow \varepsilon < 1$. Then

$$F(b_1, g, c, B/B_1) \rightarrow 1 + \frac{g}{1} \frac{\varepsilon^2}{1+2} + \frac{g(g+1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon} \right)^2 + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon} \right)^{-g}$$

and

$$F(b_1, 1, c, B/B_1) \rightarrow \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon} \right)^{-1}$$

and therefore

$$\frac{U_{2g}}{U_2^g} \rightarrow \frac{(2g)!}{2^g g!}$$

for any positive integer g . We see that in our conditions $D(u)$ tends to normality, so that, for n and m sufficiently great, we may write approximately

$$(30) \quad D(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} U_2} e^{-u^2/2U_2}.$$

This result, when n and m are sufficiently great, gives a simple mean for testing the significance of the difference of two samples in regard to some character, because, by its aid, we can easily find the probability of the difference, i. e. of u , observed in samples, supposing that it is due to random, and thus to estimate its randomness.

5. *The distribution of u for the case $n = m$.* If $n = m$ the relation (10) gives us

$$\varphi(\alpha, \beta) = \left(1 - \frac{2\mu\beta}{n^2} \right)^{-(n-1)} e^{\mu\alpha^2/n}$$

and then, from the equation

$$\left(1 - \frac{2\mu\beta}{n^2} \right)^{-(n-1)} e^{\mu\alpha^2/n} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} D(\xi, \eta) e^{\alpha\xi + \beta\eta} d\eta,$$

we easily find

$$D(\xi, \eta) = \frac{(n^2/2\mu)^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \sqrt{\frac{n}{4\mu\pi}} \eta^{n-2} e^{-\frac{n^2\eta}{2\mu} - \frac{n\xi^2}{4\mu}},$$

Now the distribution $D(u)$ will be defined by

$$D(u) = \frac{(n^2/2\mu)^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \sqrt{\frac{n}{4\mu\pi}} \int_0^u \eta^{n-\frac{3}{2}} e^{-\left(\frac{n^2}{2\mu} + \frac{n\eta^2}{4\mu}\right)} d\eta$$

and we receive

$$(31) \quad D(u) = \frac{\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi n} \Gamma(n-1)} \left(1 + \frac{u^2}{2n}\right)^{-\left(n - \frac{1}{2}\right)}.$$

This is the well known STUDENT's distribution and it takes the tabled form if we put $n = z\sqrt{2n}$ and then $n - \frac{1}{2} = \frac{v}{z}$:

$$(31 \text{ bis}) \quad D(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v-1}{2}\right)} (1 + z^2)^{-\frac{v}{2}}.$$

In STUDENT's tables (1) we find the values of the integral

$$T_v(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^z (1 + z^2)^{-\frac{v}{2}} dz$$

for $v = 2, 3, \dots, 30$ and $z = 0.1, 0.2, \dots, 3.0$ (in tables v is replaced with n).

We see that in the case $n = m$ it is profitable to take as a partial belonging coefficient

$$(32) \quad z = \frac{u}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\bar{x} - \bar{x}'}{\sqrt{\bar{\mu} + \bar{\mu}'}}.$$

The theoretical mean of this coefficient is zero and, denoting generally with $P(\alpha < x < \beta)$ the probability for any random variable x to take values in an interval (α, β) , we shall have

$$(33) \quad P(\alpha < z < \beta) = T_v(\beta) - T_v(\alpha),$$

where the right side is ($v = 2n - 1$) to be calculated by means of STUDENT's tables, if v is not greater than 30. For $v > 30$ we can write with practically sufficient degree of approximation (see an example by STUDENT, « Biometrika », vol. XI, p. 417)

$$(34) \quad D(z) = \sqrt{\frac{v-3}{2\pi}} e^{-(v-3)z^2/2},$$

(1) *Tables for Statisticians and Biometricians* edited by K. PEARSON F. R. S., table XXV, and « Biometrika », vol. XI, p. 416.

so that then

$$(35) \quad P(\alpha < z < \beta) = \sqrt{\frac{\nu-3}{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-(\nu-3)z^2/2} dz,$$

which can be calculated from tables of the probability integral.

6. *Mr. R. A. FISHER's partial belonging coefficient.* We have seen from the preceding that, when $n \neq m$, the distribution of Prof. K. PEARSON's coefficient α , is too complicate for pratical aims. The reader may remark that this fact is due to the form which accepts $\varphi_1(\alpha, \beta)$, defined by (9), for α_1 and that the matter will be much simpler if we put $\tau = \tau'$ in $\varphi_1(\alpha, \beta)$ without specifying for the moment the constants τ and ϱ . Indeed, we have then

$$\varphi_1(\alpha, \beta) = (1 - 2\mu\tau\beta)^{-\frac{s-2}{2}} e^{\frac{\varrho^2\mu s\alpha^2}{2nm}}$$

and the distribution $D(\xi_1, \eta_1)$ of $\xi_1 = \varrho(\bar{x} - \bar{x}')$, $\eta_1 = \tau(\Sigma + \Sigma')$ satisfying the condition

$$\varphi_1(\alpha, \beta) = G[D(\xi_1, \eta_1)]$$

may be easily obtained. We shall have

$$\varphi_1(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \int_0^{\infty} D(\xi_1, \eta_1) e^{\alpha\xi_1 + \beta\eta_1},$$

which is equivalent to

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} D_1(\xi_1) e^{\alpha\xi_1} d\xi_1 &= e^{\frac{\varrho^2\mu s\alpha^2}{2nm}}, \\ \int_0^{\infty} D_2(\eta_1) e^{\beta\eta_1} d\eta_1 &= (1 - 2\mu\tau\beta)^{-\frac{s-2}{2}}, \end{aligned}$$

where $D_1(\xi_1) D_2(\eta_1) = D(\xi_1, \eta_1)$ and wherefrom

$$\begin{aligned} D_1(\xi_1) &= \sqrt{\frac{nm}{2\varrho^2\mu s\pi}} e^{-\frac{nm\xi_1^2}{2\varrho^2\mu s}}, \\ D_2(\eta_1) &= \frac{(2\tau\mu)^{-\frac{s-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)} \eta_1^{\frac{s-4}{2}} e^{-\eta_1/2\tau\mu}. \end{aligned}$$

We receive finally

$$(36) \quad D(\xi_1, \eta_1) = \sqrt{\frac{nm}{2 \varrho^2 \mu s \pi}} \frac{(2 \tau \mu)^{-\frac{s-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)} \eta_1^{\frac{s-4}{2}} e^{-\frac{nm \xi_1^2}{2 \varrho^2 \mu s} - \frac{\eta_1}{2 \tau \mu}},$$

Now Mr. R. A. FISHER's belonging coefficient is (see his paper in « Metron », vol. V, N. 3, or his book *Statistical Methods for Research Workers*, p. 109)

$$(37) \quad t = \frac{(\bar{x} - \bar{x}') \sqrt{s-2}}{\sqrt{\Sigma + \Sigma'}} \sqrt{\frac{nm}{s}}$$

or

$$t = \frac{\xi_1}{\sqrt{\eta_1}}$$

if we put

$$\varrho = \sqrt{\frac{nm}{s}}, \quad \tau = \frac{1}{s-2}.$$

$D(t)$ for any ϱ and τ can be received in the same manner as the distribution $D(u)$ of the preceding paragraph and we shall have

$$D(t) = \sqrt{\frac{nm}{2 \varrho^2 \mu s \pi}} \frac{(2 \tau \mu)^{-\frac{s-2}{2}} \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)} \left(\frac{1}{2 \tau \mu} + \frac{nm t^2}{2 \varrho^2 \mu s}\right)^{-\frac{s-1}{2}}$$

or, for the above values of ϱ and τ ,

$$(38) \quad D(t) = \frac{1}{\sqrt{(s-2) \pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{s-2}\right)^{-\frac{s-1}{2}}$$

This relation was received by Mr. R. A. FISHER in another manner (see, for example, his paper in « Metron », vol. V, N. 3).

Applying (28), we find the even moments of $D(t)$:

$$(39) \quad \begin{aligned} E(t^{2g}) &= \frac{(2g)!}{2^{2g} \cdot g!} \frac{\Gamma\left(\frac{s-2}{2} - g\right)}{\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)} (s-2)^g \\ &= \frac{(2g)!}{2^g \cdot g!} \frac{(s-2)^g}{(s-4)(s-6) \dots (s-2g-2)}; \end{aligned}$$

they are finite until $s - 2g - 2 > 0$. The odd moments are all zero.

From the coefficient t we construct a new coefficient quite analogous to the coefficient α_1 of Prof. K. PEARSON, namely

$$(40) \quad \alpha_2 = \frac{s-4}{s-2} t^2 = \frac{nm(s-2)}{s} \frac{(\bar{x} - \bar{x}')^2}{\Sigma + \Sigma'},$$

for which

$$(41) \quad E(\alpha_2) = 1,$$

$$(42) \quad E(\alpha_2^g) = \frac{(2g)!}{2^g \cdot g!} \frac{(s-4)^{g-1}}{(s-6)(s-8)\dots(s-2g-2)},$$

$$(43) \quad \sigma(\alpha_2) = \sqrt{\frac{2(s-3)}{s-6}},$$

$$(44) \quad D(\alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{(s-4)\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s-4}{2}\right)} \alpha_2^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\alpha_2}{s-4}\right)^{-\frac{s-1}{2}}.$$

It is desirable, for practical applications, to estimate the probability of α_2 differing from 1 less than $\pm \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ being any given constant number less than 1. It is evident that

$$\begin{aligned} P(-\varepsilon < \alpha_2 - 1 < \varepsilon) &= P\left(-\frac{s-2}{s-4} \varepsilon < t^2 - \frac{s-2}{s-4} < \frac{s-2}{s-4} \varepsilon\right) \\ &= P\left(-\sqrt{\frac{s-2}{s-4}}(1-\varepsilon) < t < \sqrt{\frac{s-2}{s-4}}(1+\varepsilon)\right) \end{aligned}$$

wherefrom

$$\begin{aligned} P(-\varepsilon < \alpha_2 - 1 < \varepsilon) &= \frac{1}{\sqrt{(s-2)\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)} \int_{-a}^b \left(1 + \frac{t^2}{s-2}\right)^{-\frac{s-1}{2}} dt \\ &\quad \left(a = \sqrt{\frac{s-2}{s-4}}(1-\varepsilon), \quad b = \sqrt{\frac{s-2}{s-4}}(1+\varepsilon)\right) \end{aligned}$$

or, as it easy to see,

$$(45) \quad P(-\varepsilon < \alpha_2 - 1 < \varepsilon) = T_{s-1}\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{s-4}}\right) - T_{s-1}\left(-\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{s-4}}\right),$$

where the right side is to be calculated by means of STUDENT'S tables.

It must be remarked that the distribution $D(t)$ tends to be normal with increasing s , having in limit mean = 0 and standard

deviation = 1. This is evident from (39). Moreover, since n and m do not appear explicitly in $D(t)$, $D(t)$ tends to normality when only one of the numbers n and m increases indefinitely, the other remaining finite.

7. *A new partial belonging coefficient.* We can construct, without doubt, many coefficients like α_1 and α_2 . But only those of them are of interest which are sufficiently simple and have simple distributions. Such is a coefficient which I propose in this paragraph. It has an advantageous peculiarity which distinguishes it from α_1 and α_2 and which will be indicated later on.

Let us find at first the distribution $D(\bar{\mu}'/\bar{\mu})$ of $\bar{\mu}'/\bar{\mu}$. The distributions $D(\bar{\mu})$ and $D(\bar{\mu}')$ are known:

$$D(\bar{\mu}) = \frac{(n/2\bar{\mu})^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \bar{\mu}^{-\frac{n-3}{2}} e^{-n\bar{\mu}/2\mu},$$

$$D(\bar{\mu}') = \frac{(m/2\bar{\mu}')^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \bar{\mu}'^{-\frac{m-3}{2}} e^{-m\bar{\mu}'/2\mu}.$$

By means of these relations we find, putting $\bar{\mu}'/\bar{\mu} = \theta_1$,

$$\begin{aligned} D(\theta_1) &= \frac{(n/2\bar{\mu})^{\frac{n-1}{2}} (m/2\bar{\mu}')^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_0^\infty \bar{\mu}^{-\frac{n-3}{2}} (\theta_1 \bar{\mu})^{-\frac{m-3}{2}} e^{-\frac{n\bar{\mu}}{2\mu} - \frac{m\theta_1 \bar{\mu}}{2\mu}} \bar{\mu} d\bar{\mu} \\ &= \frac{(n/2\bar{\mu})^{\frac{n-1}{2}} (m/2\bar{\mu}')^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right) \theta_1^{\frac{m-3}{2}} \left(\frac{n}{2\bar{\mu}} + \frac{m\theta_1}{2\bar{\mu}}\right)^{-\frac{s-2}{2}} \end{aligned}$$

or

$$(46) \quad D(\theta_1) = \frac{n^{\frac{n-1}{2}} m^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right) \theta_1^{\frac{m-3}{2}} (n + m\theta_1)^{-\frac{s-2}{2}}.$$

We shall need further the moments of this distribution. They can be found in two ways: by means of (46) and by means of

the distribution :

$$D(\bar{\mu}, \bar{\mu}') = \frac{\left(\frac{n-1}{2\bar{\mu}}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{m-1}{2\bar{\mu}'}\right)^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \bar{\mu}^{\frac{n-3}{2}} \bar{\mu}'^{\frac{m-3}{2}} e^{-\frac{n}{2\bar{\mu}} - \frac{m}{2\bar{\mu}'}}.$$

The latter way is much simpler and we shall use it. Denoting with a any positive real number we shall have

$$\begin{aligned} E(\theta_1^a) &\equiv E\left[\left(\frac{\bar{\mu}'}{\bar{\mu}}\right)^a\right] = \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{\bar{\mu}'}{\bar{\mu}}\right)^a D(\bar{\mu}, \bar{\mu}') d\bar{\mu} d\bar{\mu}' \\ &= \frac{\left(\frac{n-1}{2\bar{\mu}}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{m-1}{2\bar{\mu}'}\right)^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n-2a-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+2a-1}{2}\right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{n}{2\bar{\mu}}\right)^{-\frac{n-2a-1}{2}} \left(\frac{m}{2\bar{\mu}'}\right)^{-\frac{m+2a-1}{2}} \end{aligned}$$

or

$$(47) \quad E(\theta_1^a) = \left(\frac{n}{m}\right)^a \frac{\Gamma\left(\frac{n-2a-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+2a-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}$$

Let $a = h$ be a positive integer, then, for $h < \frac{n-1}{2}$,

$$(48) \quad E(\theta_1^h) = \frac{(m-1)(m+1)\dots(m+2h-3)}{(n-3)(n-5)\dots(n-2h-1)} \left(\frac{n}{m}\right)^h$$

In particular

$$(49) \quad E(\theta_1) = \frac{m-1}{n-3} \frac{n}{m}, \quad E(\theta_1^2) = \frac{(m-1)(m+1)}{(n-3)(n-5)} \left(\frac{n}{m}\right)^2$$

and therefore

$$(50) \quad \sigma(\theta_1) = \sqrt{E(\theta_1^2) - E^2(\theta_1)} = \frac{n}{m(n-3)} \sqrt{\frac{(2n-4)(m-1)}{n-5}}$$

We take now

$$(51) \quad 0 = \frac{m}{n} \cdot \frac{n-3}{m-1} \theta_1 = \frac{m}{n} \cdot \frac{n-3}{m-1} \frac{\bar{\mu}'}{\bar{\mu}}$$

as a new belonging coefficient. By means of (48), (49) and (50) we find its distribution constants:

$$(52) \quad \begin{aligned} E(\theta^k) &= \frac{(m+1)(m+3)\dots(m+2h-3)}{(n-5)(n-7)\dots(n-2h-1)} \left(\frac{n-3}{m-1} \right)^{h-1}; \\ E(\theta) &= 1; \\ \sigma(\theta) &= \sqrt{\frac{2(s-4)}{(m-1)(n-5)}}. \end{aligned}$$

Compare now $\sigma(\alpha_2)$ and $\sigma(\theta)$, taking their ratio:

$$\frac{\sigma(\alpha_2)}{\sigma(\theta)} = \sqrt{\frac{2(s-3)}{s-6}} \bigg/ \sqrt{\frac{2(s-4)}{(m-1)(n-5)}} = \sqrt{\frac{(m-1)(n-5)(s-3)}{(s-4)(s-6)}}.$$

putting

$$m = ks, \quad n = ls, \quad k + l = 1$$

we easily find that

$$(54) \quad \frac{\sigma(\alpha_2)}{\sigma(\theta)} \sim \sqrt{kls},$$

where \sim is the sign of asymptotical equality. Thus, for example, when $n = m = v$, $s = 2v$:

$$\frac{\sigma(\alpha_2)}{\sigma(\theta)} \sim \sqrt{\frac{v}{2}}.$$

We see that for n and m not very great $\sigma(\alpha_2)$ may be many times greater than $\sigma(\theta)$. E. g., calculating with the exact formula (53), we find the following table, when $n = m = v$, $s = 2v$:

v	10	15	20	25	30	40	50	100
$\frac{\sigma(\alpha_2)}{\sigma(\theta)}$	1,8	2,5	2,9	3,3	3,7	4,3	4,9	7,0

This markedly less dispersion of the coefficient θ than that of α_2 is its peculiarity which was mentioned above. It can make in certain cases the use of θ more profitable than that of α_2 .

For Mr. R. A. FISHER's coefficient we have

$$\sigma(t) = \sqrt{E(t^2)} = \sqrt{\frac{(s-2)^2}{(s-4)(s-6)}}$$

and comparing this with $\sigma(\theta)$ we see again that $\sigma(\theta)$ can be many times less than $\sigma(t)$.

8. *On the distribution of θ .* The distribution of θ can be found from (46) by means of an evident transformation and we receive:

$$(55) \quad D(\theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \left(\frac{m-1}{n-3}\right)^{\frac{m-1}{2}} \theta^{\frac{m-3}{2}} \left(1 + \frac{m-1}{n-3}\theta\right)^{-\frac{s-2}{2}}.$$

Putting here

$$(56) \quad \theta = \frac{n-3}{m-1} z^2$$

we find that the distribution of z is

$$(57) \quad D(z) = \frac{2\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} z^{m-2} (1+z^2)^{-\frac{s-2}{2}}$$

and therefore

$$(58) \quad P(-\varepsilon < \theta - 1 < \varepsilon) = \frac{2\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_a^b z^{m-1} (1+z^2)^{-\frac{s-2}{2}} dz$$

$$\left(a = \sqrt{\frac{m-1}{n-3}} (1-\varepsilon), \quad b = \sqrt{\frac{m-1}{n-3}} (1+\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 1 \right).$$

As to the evaluation of this integral it can be made in the following manner. If m be even, say $m-2 = 2v$, then, applying the reduction formula

$$\int z^{m-2} (1+z^2)^{-\frac{s-2}{2}} dz = -\frac{1}{s-4} z^{m-3} (1+z^2)^{-\frac{s-4}{2}} + \frac{m-3}{s-4} \int z^{m-4} (1+z^2)^{-\frac{s-4}{2}} dz,$$

we find

$$(59) \quad \int_a^b z^{m-2} (1+z^2)^{-\frac{s-2}{2}} dz = \left[-\frac{1}{s-4} z^{m-3} (1+z^2)^{-\frac{s-4}{2}} - \frac{m-3}{(s-4)(s-6)} z^{m-5} (1+z^2)^{-\frac{s-6}{2}} - \dots \right]$$

$$(59) \quad - \frac{(m-3)(m-5)\dots 3 \cdot 1}{(s-4)(s-6)\dots (s-2v-2)} z (1+z^2)^{-\frac{s-2v-2}{2}} \Big]_a^b \\ + \frac{(m-3)(m-5)\dots 3 \cdot 1}{(s-4)(s-6)\dots (s-2v-2)} \int_a^b (1+z^2)^{-\frac{s-2v-2}{2}} dz$$

and the latter integral can be found by means of STUDENT's tables.
If m be odd, say $m = 2v + 1$, then

$$(60) \quad \int_a^b z^{m-2} (1+z^2)^{-\frac{s-2}{2}} dz + \left[-\frac{1}{s-4} z^{m-3} (1+z^2)^{-\frac{s-4}{2}} \right. \\ - \frac{m-3}{(s-4)(s-6)} z^{m-5} (1+z^2)^{-\frac{s-4}{2}} \\ - \dots \\ \left. - \frac{(m-3)(m-5)\dots 4 \cdot 2}{(s-4)(s-6)\dots (s-2v-4)} (1+z^2)^{-\frac{s-2v-4}{2}} \right]_a^b.$$

In the above formulae $[\varphi(x)]_a^b$ stands for $\varphi(b) - \varphi(a)$.

Let us consider now the distribution $D(\theta)$ for great values of n and m . We shall establish that $D(\theta)$ tends to be normal with mean $= 1$ and standard deviation $= \sqrt{\frac{2s-8}{(m-1)(n-1)}}$ when n and m increase indefinitely.

For this aim we shall show that

$$(61) \quad \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{E(\theta - 1)^{2h-1}}{[E(\theta - 1)^2]^{h-\frac{1}{2}}} = 0$$

and

$$(62) \quad \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{E(\theta - 1)^{2h}}{[E(\theta - 1)^2]^h} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2h-1)$$

for $h = 1, 2, 3, \dots$. Then our proposition will be a mere consequence of the well known TCHEBYSHEFF-MARKOFF's theorem on the limit of probability.

The relations (61) and (62) are evidently true for $h = 1$. When $h = 2$, an easy direct calculation shows that they are also true. In this case they are equivalent to the Pearsonian criteria of normality:

$$\lim \beta_1(\theta) = 0, \quad \lim \beta_2(\theta) = 3,$$

where

$$\beta_1(\theta) = \frac{E^2(\theta - 1)^3}{E^3(\theta - 1)^2}, \quad \beta_2(\theta) = \frac{E(\theta - 1)^4}{E^2(\theta - 1)^2}.$$

Let us now consider the general case.

We can write

$$E(\theta - 1)^{2h} = A_{2h} - C_{2h}^1 A_{2h-1} + C_{2h}^2 A_{2h-2} - \dots + (-1)^{2h-1} (C_{2h}^{1} - 1)$$

putting

$$A_l = E(\theta^l) \quad \text{and} \quad C_{2h}^k = \frac{(2h)!}{k!(2h-k)!}.$$

Now

$$C_{2h}^k = C_{2h-1}^k + C_{2h-1}^{k-1},$$

accordingly

$$E(\theta - 1)^{2h} = (A_{2h} - A_{2h-1}) - C_{2h-1}^1 (A_{2h-1} - A_{2h-2}) + \dots + (-1)^{2h-2} C_{2h-1}^1 (A_2 - 1).$$

But, since

$$\begin{aligned} A_l &= \frac{(m-1)(m+3)\dots(m+2l-3)}{(n-5)(n-7)\dots(n-2l-1)} \left(\frac{n-3}{m-1} \right)^{l-1} \\ A_l - A_{l-1} &= A_{l-1} \left[\frac{(m+2l-3)(n-3)}{(n-2l-1)(m-1)} - 1 \right] = \\ &= A_{l-1} \frac{(l-1)(2s-8)}{(n-2l-1)(m-1)} \end{aligned}$$

or

$$A_l - A_{l-1} = (l-1) \sigma^2(\theta) A_{l-1} \frac{n-5}{n-2l-1},$$

for

$$\frac{2s-8}{(n-2l-1)(m-1)} = \frac{n-5}{n-2l-1} \sigma^2(\theta).$$

Therefore

$$\begin{aligned} E(\theta - 1)^{2h} &= (2h-1) \sigma^2(\theta) A_{2h-1} \frac{n-5}{n-4h-1} - \\ &- C_{2h-1}^1 (2h-2) \sigma^2(\theta) A_{2h-2} \frac{n-5}{n-4h+1} \\ &+ \dots + (-1)^{2h-2} C_{2h-1}^{1} \sigma^2(\theta) \\ &= (2h-1) \sigma^2(\theta) \left[A_{2h-1} \frac{n-5}{n-4h-1} - C_{2h-1}^1 A_{2h-2} \frac{n-5}{n-4h+1} + \right. \\ &\left. + C_{2h-2}^2 A_{2h-3} \frac{n-5}{n-4h+3} - \dots + (-1)^{2h-2} C_{2h-2}^0 \right]. \end{aligned}$$

We may write further

$$\frac{n-5}{n-4h-1} A_{2h-1} = \frac{n-5}{n-4h-1} \frac{m+4h-5}{n-4h+1} \frac{n-3}{m-1} A_{2h-2} = k_0 A_{2h-2},$$

$$\frac{n-5}{n-4h+1} A_{2h-2} = \frac{n-5}{n-4h+1} \frac{m+4h-7}{n-4h+3} \frac{n-3}{m-1} A_{2h-3} = k_1 A_{2h-3}$$

and so on, where, as it is easy to see,

$$k_0 > k_1 > k_2 > \dots > k_{2h-3} = \frac{n-5}{n-7} \cdot \frac{m+1}{n-5} \cdot \frac{n-1}{m-1} > 1$$

and, for $n, m \Rightarrow \infty$,

$$\lim k_0 = \lim k_1 = \dots = \lim k_{2h-3} = 1.$$

We see that

$$\begin{aligned} E(\theta-1)^{2h} &= (2h-1) \sigma^2(\theta) [k_0 A_{2h-2} - C'_{2h-2} k_1 A_{2h-3} + \\ &\quad + C^2_{2h-2} k_2 A_{2h-4} - \dots + (-1)^{2h-3} (k_{2h-3} C'_{2h-2} - 1)] \\ &= (2h-1) \sigma^2(\theta) k [A_{2h-2} - C'_{2h-2} A_{2h-3} + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{2h-3} (C'_{2h-4} - 1)] \\ &= (2h-1) \sigma^2(\theta) k E(\theta-1)^{2h-2} \end{aligned}$$

where k is some factor tending to unity as n and m increase indefinitely.

Therefore, since $\sigma^2(\theta) = E(\theta-1)^2$,

$$\lim_{n, m \Rightarrow \infty} \frac{E(\theta-1)^{2h}}{[E(\theta-1)^2]^h} = (2h-1) \lim_{n, m \Rightarrow \infty} \frac{E(\theta-1)^{2h-2}}{[E(\theta-1)^2]^{h-1}},$$

wherefrom, since (62) is verified for $h=1$, it is evident that

$$\lim_{n, m \Rightarrow \infty} \frac{E(\theta-1)^{2h}}{[E(\theta-1)^2]^h} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2h-1).$$

In the same manner we can establish (61).

The order of approximation of $D(\theta)$ to normality can be judged from the following little table of the values of $\beta_1(\theta)$ and $\beta_2(\theta)$ for different values of n and m .

n	m	$\beta_1(\theta)$	$\beta_2(\theta)$	n	m	$\beta_1(\theta)$	$\beta_2(\theta)$
10	5	22.73	117.24	180	20	0.58	3.95
11	4	17.82	65.07	150	50	0.36	3.67
12	3	17.21	50.02	100	100	0.30	3.65
13	2	23.27	58.36	50	150	0.79	4.54
27	3	6.64	14.72	20	180	0.28	9.14
25	5	4.27	10.96	250	50	0.28	3.44
20	10	3.72	10.68	200	100	0.22	3.41
15	15	5.49	15.99	150	150	0.25	3.46
10	20	18.24	97.00	100	200	0.36	3.68
80	20	0.86	4.43	50	250	0.79	4.53
70	30	0.74	4.33	200	200	0.19	3.38
60	40	0.76	4.94	300	200	0.13	3.39
50	50	0.87	4.66	250	250	0.15	3.30
40	60	1.08	5.13	200	300	0.13	4.04
30	70	1.55	6.12	∞	2	8	5
20	80	2.87	9.17	10	∞	17.78	95.00

It is clear from this table that it is profitable to take n greater than m .

II. Total coefficients.

I. *Preliminary remarks.* We have seen that the distribution of Prof. K. PEARSON's partial belonging coefficient α_1 is very complicated. This lessens very much its value in comparison with Mr. R. A. FISHER's coefficient α_2 . The disadvantage of α_1 becomes still greater when we use it for the construction of a total belonging coefficient.

Let us take two samples S_1 and S_2 described in the beginning of the part I, § 1. We have observations on the independent random variables

$$x_1, x_2, \dots, x_v$$

the different values of which are

$$x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in} \quad (i = \overline{1, v})$$

for the sample S_1 and

$$x'_{i1}, x'_{i2}, \dots, x'_{im} \quad (i = \overline{1, v})$$

for the sample S_2 . We suppose that the variables x_i are normally distributed in an unknown general population S from which the samples S_1 and S_2 are taken. Let it be

$$\begin{aligned}\bar{x}_i &= \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n x_{ih}, & \Sigma_i &= \sum_{h=1}^n (x_{ih} - \bar{x}_i)^2, & \bar{\mu}_i &= \sqrt{\Sigma_i / n}; \\ \bar{x}'_i &= \frac{1}{m} \sum_{h=1}^m x'_{ih}, & \Sigma'_i &= \sum_{h=1}^m (x'_{ih} - \bar{x}'_i)^2, & \bar{\mu}'_i &= \sqrt{\Sigma'_i / m} \\ & & (i &= \overline{1, v}).\end{aligned}$$

We construct further

$$(63) \quad \alpha_{i1} = \frac{(\bar{x}_i - \bar{x}'_i)^2}{\frac{\bar{\mu}_i}{n} + \frac{\bar{\mu}'_i}{m}}, \quad (i = \overline{1, v})$$

— the partial belonging coefficients for the variables x_1, x_2, \dots, x_v .

Now Prof. K. PEARSON has constructed two total coefficients by means of partial coefficients (63) (1). We shall take the simpler of them¹ denoting it with L'

$$(64) \quad L' = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v \alpha_{i1}^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v \frac{(\bar{x}_i - \bar{x}'_i)^2}{\frac{\bar{\mu}_i}{n} + \frac{\bar{\mu}'_i}{m}}.$$

It is possible to find its distribution with the aid of the distributions of α_{i1} , which are given in § 3, (24) and (27). But this distribution will be too intricate to be of practical or even of theoretical use. Therefore we shall omit the consideration of L' and consider only a total belonging coefficient constructed with the partial belonging coefficients of Mr. R. A. FISHER, because its distribution, being also sufficiently complicated, is nevertheless much more manageable than the distribution of L' .

This total belonging coefficient, which can be proposed instead of the coefficient L' , is

$$(65) \quad L = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v \alpha_{i2},$$

(1) « Biometrika » vol. XVIII, p. 106.

where as before

$$\alpha_{i2} = \frac{mn(s-2)}{s} \frac{(\bar{x}_i - \bar{x}'_i)^2}{\bar{\Sigma}_i + \bar{\Sigma}'_i},$$

so that

$$(66) \quad L = \frac{mn(s-2)}{v s} \sum_{i=1}^v \frac{(\bar{x}_i - \bar{x}'_i)^2}{\bar{\Sigma}_i + \bar{\Sigma}'_i}.$$

2. *Some properties of L.* The variables x_i being independent, α_{i2} will be also independent and this fact enables us to find easily the distribution constants of L .

Thus, basing on the relations (41) and (42), we find immediately:

$$E(L) = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v E(\alpha_{i2}) = 1;$$

$$\begin{aligned} E(L^2) &= \frac{1}{v^2} E\left(\sum_{i=1}^v \alpha_{i2}\right)^2 = \frac{1}{v^2} \left[\sum_i E(\alpha_{i2}^2) + 2 \sum_{ij} E(\alpha_{i2}) E(\alpha_{j2}) \right] \\ &= \frac{3}{v} \frac{s-4}{s-6} + \frac{v-1}{v}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(L^3) &= \frac{1}{v^3} \left[\sum_i E(\alpha_{i2}^3) + 3 \sum_{ij} E(\alpha_{i2}^2) E(\alpha_{j2}) + 6 \sum_{ijh} E(\alpha_{i2}) E(\alpha_{j2}) E(\alpha_{h2}) \right] \\ &= \frac{15}{v^2} \frac{(s-4)^2}{(s-6)(s-8)} + \frac{9(v-1)}{v^2} \frac{s-4}{s-6} + \frac{(v-1)(v-2)}{v^2} \end{aligned}$$

and so on. From these relations we find the standard deviation of L :

$$(67) \quad \sigma(L) = \sqrt{E(L^2) - E^2(L)} = \sqrt{\frac{2}{v} \frac{s-3}{s-6}}.$$

It is very easy to establish that the distribution of L tends to normality with increasing v . We shall make it with the aid of a very important theorem on the probabilities due to the great russian mathematician A. LIAPOUNOFF (*Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité*, « Mémoires de l'Académie des Sciences de St.-Petersbourg », vol. XII, N, 5),

LIAPOUNOFF's theorem. Let

$$t_1, t_2, \dots, t_v$$

be independent random variables, the number of which v increases without

limit; then, if there be a positive number δ such that

$$(68) \quad \lim_{v \Rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^v E |t_i - Et_i|^2 + \delta}{\left[\sum_{i=1}^v E (t_i - Et_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\delta}{2}} = 0,$$

the probability of the inequalities

$$a < \frac{\sum_{i=1}^v t_i - \sum_{i=1}^v \varepsilon t_i}{\sqrt{2 \sum_{i=1}^v \varepsilon (t_i - \varepsilon t_i)^2}} < b$$

tends for $v \Rightarrow \infty$ to the limit

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-t^2} dt,$$

whatever be the real numbers a and b .

This theorem, rigorously demonstrated by A. LIAPOUNOFF, may be applied in our case in the following manner.

We take

$$\delta = 2, \quad t_i = \frac{1}{v} \sigma_{i2}$$

and then (68) will be satisfied. Indeed

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^v E \left(\frac{\alpha_{i2}}{v} - \frac{E \alpha_{i2}}{v} \right)^2 &= \frac{1}{v^2} \sum_{i=1}^v \sigma^2(\sigma_{i2}) = \frac{2}{v} \frac{s-3}{s-6}; \\ \sum_{i=1}^v E \left| \frac{\alpha_{i2}}{v} - \frac{E \alpha_{i2}}{v} \right|^4 &= \frac{1}{v^4} \sum_{i=1}^v [E \alpha_{i2}^4 - 4 E \alpha_{i2}^3 + 6 E \alpha_{i2}^2 - 3] \\ &= \frac{1}{v^3} \left[\frac{105 (s-4)^3}{(s-6)(s-8)(s-10)} - \frac{60 (s-4)^2}{(s-6)(s-8)} + \frac{18 (s-4)^2}{s-6} - 3 \right] \\ &= \frac{12}{v^3} \cdot \frac{5s^3 - 42s^2 + 121s - 120}{(s-6)(s-8)(s-10)} \end{aligned}$$

and it is evident that (68) holds true.

Now

$$\sum_{i=1}^v \frac{\alpha_{i2}}{v} = L, \quad \sum_{i=1}^v \frac{E \alpha_{i2}}{v} = 1$$

and accordingly

$$(69) \quad \lim_{v \Rightarrow \infty} P \left(a < \frac{L-1}{\sqrt{2 \cdot \frac{2}{v} \frac{s-3}{s-6}}} < b \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-t^2} dt.$$

We conclude from this equality that, for v sufficiently great, we may write an approximate formula for the distribution of L as follows:

$$D(L) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v(s-6)}{(s-3)\pi}} e^{-\frac{v(s-6)}{4(s-3)}(L-1)^2}.$$

It is very interesting to study the rate of approach of the distribution of L to normality. For this aim it is the simplest to use constants $\beta_1(L)$ and $\beta_2(L)$ of this distribution.

The distribution of every α_{i2} being the same it is very easy to bring the moments $E(L-1)^2$, $E(L-1)^3$ and $E(L-1)^4$ into the forms:

$$E(L-1)^2 = \frac{1}{v} E(\alpha_2-1)^2,$$

$$E(L-1)^3 = \frac{1}{v^2} E(\alpha_2-1)^3,$$

$$E(L-1)^4 = \frac{1}{v^3} E(\alpha_2-1)^4 + \frac{3(v-1)}{v^3} E^2(\alpha_2-1)^2,$$

where α_2 denotes any of coefficients α_{i2} . We have, after (42):

$$E(\alpha_2-1)^2 = \frac{3(s-4)}{s-6} - 1,$$

$$E(\alpha_2-1)^3 = \frac{15(s-4)^2}{(s-6)(s-8)} - \frac{9(s-4)}{s-6} + 2,$$

$$E(\alpha_2-1)^4 = \frac{105(s-4)^3}{(s-6)(s-8)(s-10)} - \frac{60(s-4)^2}{(s-6)(s-8)} + \frac{18(s-4)}{s-6} - 3$$

and therefore

$$(71) \quad \beta_1(L) = \frac{E^2(L-1)^3}{E^3(L-1)^2} = \frac{1}{v} \frac{E^2(\alpha_2-1)^3}{E^3(\alpha_2-1)^2} \Rightarrow \frac{8}{v},$$

$$\beta_2(L) = \frac{E(L-1)^4}{E^2(L-1)^2} = 3 + \left[\frac{1}{v} \frac{E(\alpha_2-1)^4}{E^2(\alpha_2-1)^2} - 3 \right] \Rightarrow -3 + \frac{12}{v}$$

for $s \rightarrow \infty$ and $v = \text{Const.}$

We see that the approach of $D(L)$ to normality is not very great even for great values of s . When s is not great it is still slower as it shows the following little table.

s	$\frac{E^2(a_2 - 1)^3}{E^3(a_2 - 1)^2}$	$\frac{E(a_2 - 1)^4}{E^2(a_2 - 1)^2} - 3$	v for $\beta_2(L) \leq 3.2$
15	20.693	45.845	230
20	14.820	27.872	140
30	11.510	19.606	98
40	10.377	16.988	85
50	9.785	15.706	79
60	9.431	14.950	75
80	9.024	14.094	71
100	8.795	13.620	68
150	8.507	13.037	65
200	8.378	12.762	64
300	8.254	12.499	63
400	8.187	12.371	62
500	1.149	12.297	62

In the last column of this table are given the values of v for which and corresponding s we have $\beta_2(L) \leq 3.2$ — the limit to what our distribution may be regarded as a normal one (see Prof. K. PEARSON, «*Biometrika*», vol. XI, p. 247). If, e. g., $s = 500$, a sufficiently great number for practical rescarches, we must have no less than 62 variables in order to treat our distribution as approximately normal. Evidently it is in most cases too high number and therefore, using the probability integral tables in estimating our samples S_1 and S_3 in ordinary cases, when v is not so great, we shall be in danger to commit mistakes: it is necessary in these cases to recur to the true distribution of L or to its interpolation with one of the Pearsonian frequency curves.

3. *The exact form of $D(L)$.* We shall deduce now the exact form of the distribution of L .

We have seen (§ 6, Part. I) that the distribution $D(t)$ is

$$D(t) = \frac{1}{\sqrt{(s-2)\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)} \left[1 + \frac{t^2}{s-2}\right]^{-\frac{s-1}{2}}$$

where

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{x}') \sqrt{s-2}}{\sqrt{\Sigma + \Sigma'}} \sqrt{\frac{nm}{s}}.$$

Forming t for our variables x_1, x_2, \dots, x_v and denoting the corresponding expression with t_i ($i = 1, v$) we shall have for the probability of a system of values of t_i lying in the intervals $(t_i, t_i + dt_i)$ the expression

$$DdT \equiv \lambda^v \left[\left(1 + \frac{t_1^2}{s-2} \right) \left(1 + \frac{t_2^2}{s-2} \right) \dots \left(1 + \frac{t_v^2}{s-2} \right) \right]^{-\frac{s-1}{2}} dT$$

$$\left(dT = dt_1 dt_2 \dots dt_v, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{(s-2)\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)} \right).$$

Putting here

$$(72) \quad \frac{1}{v} \frac{s-4}{s-2} \sum_{i=1}^v t_i^2 = L,$$

eliminating by means of this relation one of the variables t_i and integrating the result in respect to the remaining variables t_i in appropriate limits we shall receive $D(L) dL$. The variables t_i vary each from $-\infty$ to $+\infty$. We may replace these limits with 0 to $+\infty$, but then we must multiply DdT with 2^v . Let us now eliminate t_1 . Then the remaining t_i must satisfy the condition

$$\sum_{i=2}^v t_i^2 = \frac{v(s-2)}{s-4} L - t_1^2,$$

wherefrom we conclude that

$$D(L) = (2\lambda)^v \frac{v(s-2)}{s-4} \int_{(A)} \left[\left(1 + \frac{t_2^2}{s-2} \right) \left(1 + \frac{t_3^2}{s-2} \right) \dots \right.$$

$$\left. \dots \left(1 + \frac{t_v^2}{s-2} \right) \right]^{-\frac{s-1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{\frac{v(s-2)}{s-4} L - \sum_1 t_i^2}{s-2} \right]^{-\frac{s-1}{2}} \cdot$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{v(s-2)}{s-4} L - \sum_1 t_i^2 \right]^{-\frac{1}{2}} dt_2 dt_3 \dots dt_v,$$

where $\sum_1 t_i^2$ denotes $\sum_{i=2}^v t_i^2$ and the multiple integral is to be evaluated

luated over the region (A) formed with all positive values of t_2, t_3, \dots, t_v satisfying the condition

$$(A) : \sum_{i=2}^v t_i^2 \leq \frac{v(s-2)}{s-4} L.$$

We introduce now the new variables $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_v$ instead of t_2, t_3, \dots, t_v by means of the relations

$$t_i^2 = \frac{v(s-2)}{s-4} L \theta_i \quad (i = \overline{2, v}).$$

Then we shall have

$$D(L) = \lambda^v \left[\frac{v(s-2)}{s-4} \right]^{\frac{v}{2}} L^{\frac{v-2}{2}} \int_{(B)} \left[1 + \frac{vL}{s-4} (\mathbf{1} - \Sigma_1 \theta_i) \right]^{-\frac{s-1}{2}} (\mathbf{1} - \Sigma_1 \theta_i)^{-\frac{1}{2}} \cdot \prod_{i=2}^v \left(1 + \frac{vL}{s-4} \theta_i \right)^{-\frac{s-1}{2}} \theta_i^{-\frac{1}{2}} d\theta,$$

where the region (B) is defined by:

$$(B) : \Sigma_1 \theta_i \leq 1, \quad \theta_i \geq 0 \quad (i = \overline{2, v}).$$

Further we have the following expansions in infinite series which may be integrated term by term as it easy to see:

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{vL}{s-4} (\mathbf{1} - \Sigma_1 \theta_i) \right]^{-\frac{s-1}{2}} &= \left[\frac{vL+s-4}{s-4} \right]^{-\frac{s-1}{2}} \left[1 - \frac{vL}{vL+s-4} \Sigma_1 \theta_i \right]^{-\frac{s-1}{2}} \\ &= \left[\frac{vL+s-4}{s-4} \right]^{-\frac{s-1}{2}} \sum_{l_1=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2} + l_1\right)}{l_1! \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} \left[\frac{vL}{vL+s-4} \right]^{l_1} (\Sigma_1 \theta_i)^{l_1} \\ &= \left[\frac{vL+s-4}{s-4} \right]^{-\frac{s-1}{2}} \sum_{l_1=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2} + l_1\right)}{l_1! \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} \left[\frac{vL}{vL+s-4} \right]^{l_1} \sum_{l_{12} \dots l_{1v}} \frac{l_1!}{l_{12}! \dots l_{1v}!} \theta_2^{l_{12}} \dots \theta_v^{l_{1v}}; \\ \left(1 + \frac{vL}{s-4} \theta_i \right)^{-\frac{s-1}{2}} &= \left[\frac{vL+s-4}{s-4} \right]^{-\frac{s-1}{2}} \left[1 - \frac{vL}{vL+s-4} (\mathbf{1} - \theta_i) \right]^{-\frac{s-1}{2}} \\ &= \left[\frac{vL+s-4}{s-4} \right]^{-\frac{s-1}{2}} \sum_{l_i=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2} + l_i\right)}{l_i! \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} \left[\frac{vL}{vL+s-4} \right]^{l_i} \sum_{l_{i1}=0}^{l_i} (-1)^{l_{i1}} \frac{l_i!}{l_{i1}! l_{i2}!} \theta_i^{l_{i1}} \\ &\quad (i = \overline{2, v}; \quad l_{i2} = l_i - l_{i1}). \end{aligned}$$

Therefore, after some easy algebra

$$\begin{aligned}
 D(L) &= \lambda^v \left[\frac{v(s-2)}{s-4} \right]^{\frac{v}{2}} L^{\frac{v-2}{2}} \left[\frac{vL+s-4}{s-4} \right]^{-\frac{v(s-1)}{2}} \\
 &\cdot \sum_{p=0}^{\infty} \left[\frac{vL}{vL+s-4} \right]^p \sum_{l_i} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2} + l_1\right) \dots \Gamma\left(\frac{s-1}{2} + l_v\right)}{l_1! \dots l_v! \left[\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) \right]^v} \sum_{l_{ij}} \frac{l_1!}{l_{12}! \dots l_{1v}!} \frac{l_2!}{l_{21}! l_{22}!} \dots \\
 &\dots \frac{l_v!}{l_{v1}! l_{v2}!} \cdot (-1)^{l_{21} + \dots + l_{v1}} \int_{(B)} \theta_2^{l_{12} + l_{21} - \frac{1}{2}} \dots \theta_v^{l_{1v} + l_{v1} - \frac{1}{2}} (1 - \theta_2 - \dots - \theta_v)^{-\frac{1}{2}} \\
 &\quad d\theta_2 \dots d\theta_v,
 \end{aligned}$$

where \sum_{l_i} denotes a sum for all l_1, l_2, \dots, l_v taking the integer positive values such that $l_1 + l_2 + \dots + l_v = p$ and $\sum_{l_{ij}}$ a sum for all integer positive $l_{12}, \dots, l_{1v}, l_{21}, l_{22}, \dots, l_{v1}, l_{v2}$ such that

$$l_{12} + \dots + l_{1v} = l_1, l_{21} + l_{22} = l_2, \dots, l_{v1} + l_{v2} = l_v.$$

Now, after a classical formula due to DIRICHLET,

$$\begin{aligned}
 &\int_{(B)} \theta_2^{l_{12} + l_{21} - \frac{1}{2}} \dots \theta_v^{l_{1v} + l_{v1} - \frac{1}{2}} (1 - \theta_2 - \dots - \theta_v)^{-\frac{1}{2}} d\theta_2 \dots d\theta_v = \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(l_{12} + l_{21} + \frac{1}{2}\right) \dots \Gamma\left(l_{1v} + l_{v1} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(l_{12} + l_{21} + \dots + l_{1v} + l_{v1} + \frac{v}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

and, putting for brevity

$$\begin{aligned}
 C_p &= \sum_{l_i} \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2} + l_1\right) \dots \Gamma\left(\frac{s-1}{2} + l_v\right)}{l_1! \dots l_v! \left[\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) \right]^v} \Gamma \frac{l_1!}{l_{12}! \dots l_{1v}!} \frac{l_2!}{l_{21}! l_{22}!} \dots \frac{l_v!}{l_{v1}! l_{v2}!} \cdot \\
 (73) \quad &\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(l_{12} + l_{21} + \frac{1}{2}\right) \dots \Gamma\left(l_{1v} + l_{v1} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(l_{12} + l_{21} + \dots + l_{1v} + l_{v1} + \frac{v}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

we shall have after some evident reductions

$$D(L) = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) \sqrt{v}}{\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right) \sqrt{(s-4)\pi}} \right]^v L^{\frac{v-2}{2}} \left[1 + \frac{vL}{s-4} \right]^{-\frac{v(s-1)}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} C_p \left[\frac{vL}{vL+s-4} \right]^p.$$

The series on the right side is convergent for all positive values of L .

We find by means of this expression for $D(L)$

$$\begin{aligned} P(\alpha < L-1 < \beta) &= \int_{1+\alpha}^{1+\beta} D(L) dL = \\ &= \left[\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right) \sqrt{\pi}} \right]^v 2 \sum_{p=0}^{\infty} C_p \int_a^b z^{v+2p-1} (1+z^2)^{-\frac{v(s-1)}{2}-p} dz \\ &\left(z = \sqrt{\frac{vL}{s-4}}, \quad a = \sqrt{\frac{v(1+\alpha)}{s-4}}, \quad b = \sqrt{\frac{v(1+\beta)}{s-4}}, \quad -1 \leq \alpha < \beta \right): \end{aligned}$$

the evaluation of $P(\alpha < L-1 < \beta)$ is reduced to the calculations quite similar to those which were considered in § 8, Part I, and can be accomplished by means of formulae (59) and (60).

4. *A total belonging coefficient constructed with θ .* Let us take the partial belonging coefficients

$$\theta_i = \frac{m}{n} \cdot \frac{n-3}{m-1} \frac{\bar{\mu}'_i}{\bar{\mu}_i} = \frac{n-3}{m-1} \frac{\Sigma'_i}{\Sigma_i}$$

relating to the variables x_i . We construct with them a new total belonging coefficient which we denote with H and which is

$$(75) \quad H = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v \theta_i$$

or

$$(75 \text{ bis}) \quad H = \frac{1}{v} \frac{m(n-3)}{n(m-1)} \sum_{i=1}^v \bar{\mu}'_i / \bar{\mu}_i = \frac{1}{v} \frac{n-3}{m-1} \sum_{i=1}^v \frac{\Sigma'_i}{\Sigma_i}.$$

We put here, may it be remembered,

$$\begin{aligned} \Sigma_i &= \sum_{h=1}^n (x_{ih} - \bar{x}_i), & \Sigma'_i &= \sum_{h=1}^n (x_{ih} - \bar{x}'_i)^2, \\ (76) \quad \bar{\mu}_i &= \frac{1}{n} \Sigma_i, & \bar{\mu}'_i &= \frac{1}{m} \Sigma'_i. \end{aligned}$$

By means of (52), we find without difficulty the distribution constants of H :

$$\begin{aligned}
 E(H) &= 1; \\
 (77) \quad E(H^2) &= \frac{1}{v} \frac{m+1}{n-5} \frac{n-3}{m-1} + \frac{v-1}{v}; \\
 E(H^3) &= \frac{1}{v^2} \frac{(m+1)(m+3)}{(n-5)(n-7)} \left(\frac{n-3}{m-1} \right)^2 + 3 \frac{v-1}{v^2} \frac{m+1}{n-5} \frac{n-3}{m-1} + \\
 &\quad + \frac{(v-1)(v-2)}{v^2}
 \end{aligned}$$

and so on. The central moments are:

$$\begin{aligned}
 E(H-1)^2 &= \sigma^2(H) = \frac{1}{v} E(\theta-1)^2 = \frac{2}{v} \frac{s-4}{(m-1)(n-5)}; \\
 E(H-1)^3 &= \frac{1}{v^2} E(\theta-1)^3 = \frac{1}{v^2} \left[\frac{(m+1)(m+3)}{(n-5)(n-7)} \left(\frac{n-3}{m-1} \right)^2 - \right. \\
 (78) \quad &\quad \left. - 3 \frac{m+1}{n-5} \frac{n-3}{m-1} + 2 \right]; \\
 E(H-1)^4 &= \frac{1}{v^3} E(\theta-1)^4 + \frac{3(v-1)}{v^3} E^2(\theta-1)^2 = \\
 &= \frac{1}{v^3} \left[\frac{(m+1)(m+3)(m+5)}{(n-5)(n-7)(n-9)} \left(\frac{n-3}{m-1} \right)^3 - 4 \frac{(m+1)(m+3)}{(n-5)(n-7)} \left(\frac{n-3}{m-1} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 6 \frac{m+1}{n-5} \frac{n-3}{m-1} - 3 \right] + \frac{3(v-1)}{v^3} \cdot \frac{4(s-4)^2}{(m-1)^2(n-5)^2}.
 \end{aligned}$$

Therefrom Pearsonian constants β_1 and β_2 for H are:

$$\begin{aligned}
 (79) \quad \beta_1(H) &= \frac{1}{v} \frac{E^2(\theta-1)^3}{E^3(\theta-1)^2}, \\
 \beta_2(H) &= 3 + \frac{1}{v} \left[\frac{E(\theta-1)^4}{E^2(\theta-1)^2} - 3 \right].
 \end{aligned}$$

It was shown above (§ 8, Part I) that, for n and m indefinitely increasing, the distribution of θ tends to normality. Accordingly, for n and m great, we shall have approximately $\beta_1(H) = 0$ and $\beta_2(H) = 3$ even for little values of v . Indeed, this remark is justified by the following little table.

n	m	$\beta_1(\theta)$	$\beta_2(\theta) - 3$	v for $\beta_2(H) \leq 3.2$
80	20	0.86	1.43	8
70	30	0.74	1.33	7
60	40	0.76	1.94	10
50	50	0.87	1.66	9
180	20	0.58	0.95	5
150	50	0.36	0.67	4
100	100	0.30	0.65	4
250	50	0.28	0.44	3
200	100	0.22	0.41	2
150	150	0.25	0.46	3

This table shows that for n and m lying in practically admissible limits we can take few variables x_i in order to receive the distribution of H practically near to normality. This fact makes the use of H more advantageous and surer than that of L or L' . Thus, e. g., comparing our present table with that on the page 29, we see that for $n = 80$, $m = 20$ we must take $v \geq 8$ in order to have $\beta_2(H) \leq 3.2$ and $v \geq 68$ if we desire to have $\beta_2(L) \leq 3.2$. Taking $n = m = 100$ we are in still more profitable conditions using H instead of L , for $\beta_2(H)$ will be < 3.2 already for $v = 4$ and we shall have $\beta_2(L) \leq 3.2$ only for $v \geq 64$.

Our remark on the superiority of H on L or L' may be confirmed in other direction. Indeed, all our considerations on the belonging coefficients repose on the supposition of the independence of variables x_i and it is clear that in any concrete case, say in some anthropological investigation, it is impossible to take 64 uncorrelated characters in one individuum and comparatively easy to find 4 such characters and, accordingly, to apply safely the coefficient H . Besides, its calculation, as that of its standard deviation, is very simple and does not require any additional constants but only those which are habitually allways calculated to have standard deviations, namely the second central moments.

I may remark here that the coefficient H was applied with good results by Dr. L. OSHANIN in his anthropological researches concerning Central Asian Jews (these researches will soon be published).

Concluding this paragraph we remark that the statement that $D(H)$ tends to normality for $v \Rightarrow \infty$ may be proved quite rigorously by means of the Liapounoff's theorem. Indeed, we have:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^v E \left(\frac{\theta_i}{v} - \frac{E \theta_i}{v} \right)^2 &= \frac{2}{v} \frac{s-4}{(m-1)(n-5)}, \\ \sum_{i=1}^v E \left(\frac{\theta_i}{v} - \frac{E \theta_i}{v} \right)^4 &= \frac{1}{v^3} \left[\frac{(m+1)(m+3)(m+5)}{(n-5)(n-7)(n-9)} \left(\frac{n-3}{m-1} \right)^3 - \right. \\ &\quad \left. - 4 \frac{(m+1)(m+3)}{(n-5)(n-7)} \left(\frac{n-3}{m-1} \right)^2 + 6 \frac{m+1}{n-5} \frac{n-3}{m-1} - 3 \right], \end{aligned}$$

wherefrom

$$\lim_{v \Rightarrow \infty} \frac{\sum E \left(\frac{\theta_i}{v} - \frac{E \theta_i}{v} \right)^4}{\left[\sum E \left(\frac{\theta_i}{v} - \frac{E \theta_i}{v} \right)^2 \right]^2} = 0,$$

and therefore $\frac{1}{v} \sum \theta_i = H$ is distributed normally for $v = \infty$.

5. *The exact form of the distribution $D(H)$.* We shall proceed now to establish the exact distribution of H for v, n and m arbitrary.

The distribution of θ_i being

$$\begin{aligned} K \theta_i^{\frac{m-3}{2}} \left(1 + \frac{m-1}{n-3} \theta_i \right)^{-\frac{s-2}{2}} \\ \left[K = \frac{\Gamma \left(\frac{s-2}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{n-1}{2} \right) \Gamma \left(\frac{m-1}{2} \right)} \left(\frac{m-1}{n-3} \right)^{\frac{m-1}{2}} \right] \end{aligned}$$

we shall receive the distribution of $H = \frac{1}{v} \sum \theta_i$, if we transform the differential

$$(80) \quad K^v \prod_{i=1}^v \theta_i^{\frac{m-3}{2}} \left(1 + \frac{m-1}{n-3} \theta_i \right)^{-\frac{s-2}{2}} d\theta_i,$$

to the variables $H, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_v$ and integrate it for all positive values of θ_i ($i = 2, v$) satisfying the condition

$$\sum_{i=2}^v \theta_i \equiv \sum_{i=2}^v \theta_i \leq v H.$$

But we shall receive the same result putting in (80)

$$(81) \quad \theta_1 = v H - \sum_{i=2}^v \theta_i, \quad \theta_i = v H \tau_i \quad (i = 2, v)$$

and integrating for all positive τ_i such that

$$(82) \quad \sum_{i=2}^v \tau_i \leq 1.$$

Now

$$\frac{D(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_v)}{D(H, \tau_2, \dots, \tau_v)} = \begin{vmatrix} v - v \sum_{i=2}^v \theta_i, & -v H, & -v H, & \dots, & -v H \\ v \tau_2 & , & v H & , & 0 & , \dots, & 0 \\ v \tau_3 & , & 0 & , & v H & , \dots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v \tau_v & , & 0 & , & 0 & , \dots, & v H \end{vmatrix} \\ = v^v H^{v-1} > 0$$

and therefrom (80) becomes

$$(83) \quad K^v v^{\frac{m+1}{2}} v H^{\frac{m+1}{2}} v^{-1} (1 - \sum_{i=2}^v \tau_i)^{\frac{m-1}{2}} \tau_2^{\frac{m-1}{2}} \dots \tau_v^{\frac{m-1}{2}} \cdot \\ \cdot \left[1 + \frac{m-1}{n-3} v H (1 - \sum_{i=2}^v \tau_i) \right]^{-\frac{s-2}{2}} \left[1 + \frac{m-1}{n-3} v H \tau_2 \right]^{-\frac{s-2}{2}} \dots \\ \dots \left[1 + \frac{m-1}{n-3} v H \tau_v \right]^{-\frac{s-2}{2}} dH d\tau_2 \dots d\tau_v.$$

We have further the identities

$$1 + \frac{m-1}{n-3} v H (1 - \sum_{i=2}^v \tau_i) = \left(1 + \frac{m-1}{n-3} v H \right) (1 - \varphi \sum_{i=2}^v \tau_i), \\ 1 + \frac{m-1}{n-3} v H \tau_i = \left(1 + \frac{m-1}{n-3} v H \right) [1 - \varphi (1 - \tau_i)],$$

where

$$\varphi = \frac{\frac{m-1}{n-3} v H}{1 + \frac{m-1}{n-3} v H}.$$

Remarking that $0 < \varphi < 1$ we may expand

$$\left[1 + \frac{m-1}{n-3} {}^\nu H (1 - \Sigma_1 \tau_i) \right]^{-\frac{s-2}{2}} \quad \text{and} \quad \left(1 + \frac{m-1}{n-3} {}^\nu H \tau_i \right)^{\frac{m-1}{2}}$$

in series by means of the binomial theorem (having transformed them, of course, before expansion with the aid of our identities) and thus, after further expansions of terms of the form $(1 - \tau_i)^a$, $(\Sigma_1 \tau_i)^b$ and some easy transformations quite similar to those which have been made in the deduction of $D(L)$ in § 3 of this Part, we reduce (83) to the form

$$\begin{aligned} & K {}^\nu H^{\frac{m+1}{2} {}^\nu} H^{\frac{m+1}{2} {}^\nu-1} \left(1 + \frac{m-1}{n-3} {}^\nu H \right)^{-\frac{s-2}{2} {}^\nu} \\ & \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \varphi^p \sum_{l_i} \frac{\Gamma\left(\frac{s-2}{2} + l_1\right) \dots \Gamma\left(\frac{s-2}{2} + l_v\right)}{l_1! \dots l_v! \left[\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right) \right] {}^\nu} \sum_{l_{ij}} \frac{l_1!}{l_{12}! \dots l_{1v}!} \frac{l_2!}{l_{21}! l_{22}!} \dots \frac{l_v!}{l_{v1}! l_{v2}!} \cdot \\ & \cdot (-1)^{l_{21} + l_{31} + \dots + l_{v1}} \tau_2^{l_{12} + l_{21} + \frac{m-1}{2}} \dots \tau_v^{l_{1v} + l_{v1} + \frac{m-1}{2}} (1 - \Sigma_1 \tau_i)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \\ & \cdot dH d\tau_2 \dots d\tau_v, \end{aligned}$$

where \sum_{l_i} and $\sum_{l_{ij}}$ have the same meaning as in § 3.

Applying finally the DIRICHLET'S integral we receive:

$$(84) \quad D(H) = \left(K {}^\nu H^{\frac{m-1}{2} {}^\nu} H^{\frac{(m+1){}^\nu}{2}-1} \left(1 + \frac{m-1}{n-3} {}^\nu H \right)^{-\frac{(s-2){}^\nu}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} K_p \left[\frac{\frac{m-1}{n-3} {}^\nu H}{1 + \frac{m-1}{n-3} {}^\nu H} \right]^p \right)$$

where

$$\begin{aligned} (85) \quad K_p = & \sum_{l_i} \frac{\Gamma\left(\frac{s-2}{2} + l_1\right) \dots \Gamma\left(\frac{s-2}{2} + l_v\right)}{l_1! \dots l_v! \left[\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right) \right] {}^\nu} \sum_{l_{ij}} \frac{l_1!}{l_{12}! \dots l_{1v}!} \frac{l_2!}{l_{21}! l_{22}!} \dots \frac{l_v!}{l_{v1}! l_{v2}!} \cdot \\ & \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(l_{12} + l_{21} + \frac{m+1}{2}\right) \dots \Gamma\left(l_{1v} + l_{v1} + \frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(l_{12} + l_{21} + \dots + l_{1v} + l_{v1} + \frac{m+1}{2}\right)} \\ & (l_{12} + \dots + l_{1v} = l_1; \quad l_{21} + l_{22} + l_2; \quad \dots; \quad l_{v1} + l_{v2} = l_v; \\ & \quad l_1 + l_2 + \dots + l_v = p). \end{aligned}$$

From this expression of $D(H)$ we deduce :

$$P(\alpha < H - 1 < \beta) = 2 \left[\frac{\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \right]^v \sum_{p=0}^{\infty} K_p \int_a^b z^{v(m+1)+p} (1+z^2)^{-v\frac{s-2}{2}-p} dz$$

$$\left(z = \sqrt{\frac{m-1}{n-3}} v H, a = \sqrt{\frac{m-1}{n-3}} v (1+\alpha), b = \sqrt{\frac{m-1}{n-3}} v (1+\beta), \right.$$

$$\left. -1 \leq \alpha < \beta \right).$$

III. The case of the known general population.

I. *On the distribution of one partial belonging coefficient of Prof. K. PEARSON* We shall suppose now that the general population, to which belong our samples S_1 and S_2 , is known and consider shortly our problem for this case.

Let us suppose that a variable x is distributed normally in the general population with mean x_0 and variance μ . Denoting as before with x_1, x_2, \dots, x_n and x'_1, x'_2, \dots, x'_m the values of x observed in our samples and putting

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{x}' = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x'_i, \quad S = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}), \quad S' = \sum_{i=1}^m (x'_i - \bar{x}')$$

we shall find at first the generating function for the product moments of the quantities $k(x - \bar{x})$ and $lS + l'S'$, k, l and l' being some constants.

This generating function, say $\varphi(\alpha, \beta)$, is determined by the relation

$$\varphi(\alpha, \beta) = \lambda^s \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta + \alpha k(\bar{x} - \bar{x}') + \beta(lS + l'S')} dx_1 \dots dx_n dx'_1 \dots dx'_m,$$

where

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}}, \quad \theta = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{2\mu} + \frac{\sum (x' - \bar{x}')^2}{2\mu} = \frac{S + S'}{2\mu}$$

and wherefrom it is not difficult to find

$$\varphi(\alpha, \beta) = (1 - 2\mu l\beta)^{-\frac{1}{n}} (1 - 2\mu l'\beta)^{-\frac{m}{2}} e^{\frac{\mu k^2 \alpha^2}{2n(1-2\mu l\beta)} + \frac{\mu k^2 \alpha^2}{2m(1-2\mu l'\beta)}}$$

We shall receive the simplest result putting here

$$k = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = \sqrt{\frac{nm}{s}}, \quad l = l' = \frac{1}{s}$$

Then

$$(86) \quad \varphi(\alpha, \beta) = \left(1 - \frac{2\mu\beta}{s}\right)^{-\frac{s}{2}} e^{\frac{\mu\alpha^2}{2\left(1 - \frac{2\mu\beta}{s}\right)}}.$$

I have not succeeded to find the distribution of $(\bar{x} - \bar{x}') \sqrt{\frac{nm}{s}}$ and $\frac{1}{s}(S + S')$ for this generating function in a manageable form. But we can find by means of (86) all moments of the Prof K. PEARSON's first partial belonging coefficient

$$\alpha'_1 = \frac{(\bar{x} - \bar{x}') \sqrt{nm}}{\sqrt{S + S'}}.$$

Indeed we can write

$$\varphi(\alpha, \beta) = \left(1 - \frac{2\mu\beta}{s}\right)^{-\frac{s}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{\mu\alpha^2}{2}\right)^p \left(1 - \frac{2\mu\beta}{s}\right)^{-p}$$

and therefore, supposing that the distribution $D(u, v)$ of

$$u = (\bar{x} - \bar{x}') \sqrt{\frac{nm}{s}} \quad \text{and} \quad v = \frac{1}{s}(S + S')$$

is brought into the form

$$D(u, v) = \sum_{p=0}^{\infty} D_{1p}(u) D_{2p}(v),$$

we may define $D_{1p}(u)$ and $D_{2p}(v)$ by the relations

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} D_{1p}(u) e^{\alpha u} du &= \frac{1}{p!} \left(\frac{\mu\alpha^2}{2}\right)^p \\ \int_0^{\infty} D_{2p}(v) e^{\beta v} dv &= \left(1 - \frac{2\mu\beta}{s}\right)^{-\frac{s}{2} - p} \end{aligned}$$

($p = \overline{0, \infty}$). The first of these relations can be solved by some general method based on the use of an appropriated system of ortho-

gonal functions (for example, Hermitean), but this solutions are of little use. The second gives us

$$D_{2p}(v) = \frac{(s/2\mu)^{\frac{s+2p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+2p}{2}\right)} v^{\frac{s+2p-2}{2}} e^{-\frac{sv}{2\mu}}.$$

Thus

$$D(u, v) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(s/2\mu)^{\frac{s+2p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+2p}{2}\right)} v^{\frac{s+2p-2}{2}} e^{-\frac{sv}{2\mu}} D_{1p}(u)$$

and therefore

$$\begin{aligned} E(\alpha_1^h) &= \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^{\infty} u^h v^{-h/2} D(u, v) dv \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(s/2\mu)^{\frac{s+2p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+2p}{2}\right)} v^{\frac{s+2p-h-2}{2}} e^{-\frac{sv}{2\mu}} dv \int_{-\infty}^{\infty} u^h D_{1p}(u) du. \end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u^h D_{1p}(u) du &= \left[\frac{d^h}{d\alpha^h} \int_{-\infty}^{\infty} D_{1p}(u) e^{\alpha u} du \right]_{\alpha=0} \\ &= \left[\frac{d^h}{d\alpha^h} \left(\frac{1}{p!} \left(\frac{\mu\alpha^2}{2} \right)^p \right) \right]_{\alpha=0} \end{aligned}$$

and is zero for h uneven or h even but not equal to $2p$ and $\frac{(2p)!}{2^p p!} \mu^p$ for $h = 2p$. We conclude therefrom that

$$E(\alpha_1^{2p+1}) = 0,$$

(87)

$$E(\alpha_1^{2p}) = \frac{(2p)!}{2^p p!} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+2p}{2}\right)} \left(\frac{s}{2}\right)^p = \frac{(2p)!}{2^p p!} \frac{s^{p-1}}{(s+2)(s+4)\dots(s+2p-2)}$$

$$(p = 0, 1, 2, \dots),$$

for

$$\int_0^{\infty} \frac{(s/2\mu)^{\frac{s+2p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+2p}{2}\right)} v^{\frac{s+2p-4-2}{2}} e^{-\frac{sv}{2\mu}} dv = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+2p}{2}\right)} \left(\frac{s}{2\mu}\right)^p$$

when $h = 2p$.

The relations (87) show at once that

$$\lim_{s \Rightarrow \infty} \frac{E(\alpha_1'^{2p+1})}{[E(\alpha_1'^2)]^{\frac{2p+1}{2}}} = \lim_{s \Rightarrow \infty} E(\alpha_1'^{2p+1}) = 0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2p+1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt,$$

$$\lim_{s \Rightarrow \infty} \frac{E(\alpha_1'^{2p})}{[E(\alpha_1'^2)]^p} = \lim_{s \Rightarrow \infty} E(\alpha_1'^{2p}) = 1.3 \dots (2p-1) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2p} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

and therefore, according to the TCHEBYSHEFF-MARKOFF's theorem, the distribution $D(\alpha_1')$ for $s \Rightarrow \infty$ tends to $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\alpha_1'^2}$.

For any s we have

$$E(\alpha_1'^2) = 1, \quad E(\alpha_1'^3) = 0, \quad E(\alpha_1'^4) = 3 \cdot \frac{s}{s+2}$$

and therefore

$$\beta_1(\alpha_1') = 0, \quad \beta_2(\alpha_1') = \frac{3s}{s+2} = 3 \left[1 + \frac{2}{s} + \frac{4}{s^2} + \dots \right].$$

We see that for s not very great the distribution $D(\alpha_1')$ practically is very near to normality.

We shall conclude this paragraph with some remarks on the total coefficient

$$L'_1 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (\alpha_{i1}')^2$$

due to Prof. K. PEARSON.

It is very easy to show that its distribution tends to normality for $v \Rightarrow \infty$. Its moments can be found by means of the moments of its constituents and we find in this manner

$$E(L'_1) = 1, \quad E(L_1'^2) = \frac{3}{v} \frac{s}{s+2} + \frac{v-1}{v}, \quad E(L'_1 - 1)^2 = \frac{2}{v} \frac{s-1}{s+2}$$

and therefore

$$\sigma(L'_1) = \sqrt{\frac{2}{v} \frac{s-1}{s+2}}.$$

We find further

$$E(L'_1 - 1)^3 = \frac{1}{v^2} \left[\frac{15s^2}{(s+2)(s+4)} - \frac{9s}{s+2} + 2 \right] = \frac{8(s-1)(s-2)}{v^2(s+2)(s+4)};$$

$$E(L'_1 - 1)^4 = \frac{1}{v^3} \left[\frac{105s^3}{(s+2)(s+4)(s+6)} - \frac{60s^2}{(s+2)(s+4)} + \frac{18s}{s+2} - 3 \right] +$$

$$+ \frac{12(v-1)}{v^3} \left(\frac{s-1}{s+2} \right)^2 = \frac{12(s-1)(5s^2 - 13s + 12)}{v^3(s+2)(s+4)(s+6)} + \frac{12(v-1)}{v^3} \left(\frac{s-1}{s+2} \right)^2,$$

whence

$$\beta_1(L'_1) = \frac{8}{v} \frac{(s-2)^2(s+2)}{(s-1)(s+4)^2},$$

$$\beta_2(L'_1) = 3 + \frac{3}{v} \left[\frac{(s+2)(5s^2 - 13s + 12)}{(s-1)(s+4)(s+6)} - 1 \right].$$

We have again, as in § 2, part I:

$$\beta_1(L'_1) \Rightarrow \frac{8}{v} \quad \text{and} \quad \beta_2(L'_1) \Rightarrow 3 + \frac{12}{v} \quad \text{for } s \Rightarrow \infty.$$

2. *On the coefficients* θ *and* H . By the method quite similar to that of the preceding paragraph we find that the distribution $D(\bar{\mu}, \bar{\mu}')$ of

$$\bar{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2, \quad \bar{\mu}' = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x'_i - x_0)^2$$

will be

$$D(\bar{\mu}, \bar{\mu}') = \frac{(n/2 \bar{\mu})^{\frac{n}{2}} (m/2 \bar{\mu}')^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \bar{\mu}^{-\frac{n-2}{2}} \bar{\mu}'^{-\frac{m-2}{2}} e^{-\frac{n\bar{\mu}}{2} - \frac{m\bar{\mu}'}{2}}$$

wherefrom we find

$$E(\theta) = 1, \quad E(\theta^h) = \frac{(m+2)(m+4) \dots (m+24-2)}{(n-4)(n-6) \dots (n-2h)} \left(\frac{n-2}{m} \right)^{h-1}$$

($n-2 > 0$), putting

$$\theta = \frac{n-2}{n} \frac{\bar{\mu}'}{\bar{\mu}}.$$

We have

$$\sigma(\theta) = \sqrt{\frac{2s-4}{m(n-4)}}.$$

It is not difficult to find the distribution of θ : it will be

$$D(\theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(\frac{m}{n-2}\right)^{\frac{m}{2}} \theta^{\frac{m-2}{2}} \left(1 + \frac{m}{n-2} \theta\right)^{-\frac{s}{2}}.$$

We shall not develop further this subject and shall go to make some remarks on the total coefficient

$$H = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v \theta_i.$$

It is evident that its distribution will tend to normality with increasing v . Further its main distribution constants will be

$$\begin{aligned} E(H) &= 1; \\ \sigma(H) &= \sqrt{\frac{2}{v} \frac{s-2}{m(n-4)}}; \\ \beta_1(H) &= \frac{1}{v} \frac{E^2(\theta-1)^3}{E^2(\theta-1)^2}, \\ \beta_2(H) &= 3 + \left[\frac{E(\theta-1)^4}{E^2(\theta-1)^2} - 3 \right]. \end{aligned}$$

We must remark that the distribution of θ tends as for the case of unknown general population to normality for increasing n and m and therefore $\beta_1(H)$ may be near to zero and $\beta_2(H)$ to 3 already for little values of v , if n and m are sufficiently great.

Tashkend, 23. III. 1927.

CHARLES JORDAN.

Sur une formule d'interpolation dérivée
de la formule d'EVERETT.

§ 1. *Notations.* Soient Δ le symbole des différences progressives :

$$\Delta f(x) = f(x + 1) - f(x) ;$$

δ^2 le symbole de la deuxième différence centrale,

$$\delta^2 f(x) = f(x + 1) - 2f(x) + f(x - 1).$$

Le symbole ∇ signifiera l'opération

$$\nabla f(x) = f(x + 1).$$

Entre ces symboles il y a la relation suivante

$$(1) \quad \delta^2 = \frac{\Delta^2}{\nabla} = \frac{(\nabla - 1)^2}{\nabla}.$$

Du point de vue de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division ces symboles se comportent comme des quantités algébriques.

§ 2. On peut écrire la série d'EVERETT sous la formule symbolique suivante

$$(2) \quad f(x + \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{\vartheta + n}{2n + 1} \nabla \delta^{2n} + \binom{\varphi + n}{2n + 1} \delta^{2n} \right] f(x)$$

où

$$0 < \vartheta < 1, \text{ et } \varphi = 1 - \vartheta.$$

Cette formule d'interpolation est très pratique, en effet elle rend superflue l'impression des différences d'ordre impair dans les tables, ce qui les rend plus économiques et plus maniables. Les cal-

culs peuvent être effectués assez rapidement surtout en se servant de la table de THOMPSON donnant à 10 décimales les grandeurs (1)

$\binom{\vartheta + n}{2n+1}$ pour $n = 1, 2, 3$ et pour $\vartheta = 0,001; 0,002; \dots 1,000$

§ 3. On peut déduire de la formule d'Everett une autre aussi simple, qui permet de se passer de toutes les différences, sans augmenter les calculs à effectuer. Remarquons que l'on a

$$\begin{aligned}\binom{\vartheta + n}{2n+1} &= \frac{\vartheta + n}{2n+1} \cdot \binom{\vartheta + n-1}{2n}; \\ \binom{\varphi + n}{2n+1} &= \frac{\varphi + n}{2n+1} \cdot \binom{\varphi + n-1}{2n}\end{aligned}$$

car

$$\binom{\varphi + n-1}{2n} = \binom{\vartheta + n-1}{2n};$$

par suite la formule (2) devient :

$$(3) \quad f(x+\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\vartheta + n-1}{2n} \frac{1}{2n+1} [(\vartheta + n) \nabla \delta^{2n} + (\varphi + n) \delta^{2n}] f(x).$$

De la formule (1) il résulte

$$(4) \quad \delta^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \binom{2n}{i} \nabla^{n-i}.$$

En remplaçant la valeur de δ^{2n} dans (3) par la valeur ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned}f(x+\vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\vartheta + n-1}{2n} \frac{1}{2n+1} \left[(\vartheta + n) \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \binom{2n}{i} \nabla^{n-i+1} + \right. \\ &\quad \left. + (\varphi + n) \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \binom{2n}{i} \nabla^{n-i} \right] f(x)\end{aligned}$$

et en groupant les termes de deux a deux, on peut écrire :

$$\begin{aligned}f(x+\vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\vartheta + n-1}{2n} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \left\{ \binom{2n}{k} (\vartheta + n) - \right. \\ &\quad \left. - \binom{2n}{k-1} (\varphi + n) \right\} \nabla^{n+1-k} + \left[(\varphi + n) \binom{2n}{k} - \right. \\ &\quad \left. - (\vartheta + n) \binom{2n}{k-1} \right] \frac{1}{\nabla^{n-k}} \Big\} f(x).\end{aligned}$$

On peut simplifier facilement cette expression, et l'on trouve

$$(5) \quad f(x+\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\vartheta+n-1}{2n} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k} \left[(\vartheta+n-k) \nabla^{n+1-k} + \right. \\ \left. + (\varphi+n-k) \frac{1}{\nabla^{n-k}} \right] f(x).$$

Pour abréger désignons par

$$(6) \quad Y_s = \frac{1}{2s+1} \left[(\vartheta+s-1) \nabla^s + (\varphi+s-1) \frac{1}{\nabla^{s-1}} \right] f(x).$$

Remarquons que Y_1 est la valeur approchée de $f(x+\vartheta)$ obtenu par interpolation linéaire entre $f(x+1)$ et $f(x)$; et d'une manière générale Y_s est la valeur approchée de $f(x+\vartheta)$ obtenue en interpolant linéairement entre $f(x+s)$ et $f(x-s+1)$. On peut calculer ces grandeurs très rapidement à l'aide des machines à calculer modernes (1).

En tenant compte de (5) et de (6) notre formule (3) devient si l'on pose $n+1-k=s$

$$(7) \quad f(x+\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\vartheta+n-1}{2n} \frac{1}{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} (-1)^{s+1} \binom{2n+1}{n+s} \frac{2s-1}{2n-1} Y_s$$

On peut encore simplifier le coefficient de Y_s en se servant de l'identité

$$\binom{2n+1}{n+s} \frac{2s-1}{2n+1} = \binom{2n}{n-s+1} - \binom{2n}{n-s}$$

Remarquons que, n étant donné, la somme des coefficients de Y_s est nulle si s varie de 1 à $n+1$; de plus que la somme des valeurs absolues de ces coefficients est égal à $\binom{2n}{n}$.

Pour abréger l'écriture posons

$$C_n(\vartheta) = (-1)^n \binom{\vartheta+n-1}{2n} = \binom{\vartheta+n-1}{n} \bigg/ \binom{2n}{n}$$

On aura enfin

$$(8) \quad f(x+\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\vartheta) \sum_{s=1}^{n+1} (-1)^{s+1} \left[\binom{2n}{n-s+1} - \binom{2n}{n-s} \right] Y_s$$

(1) Comme par exemple la *Nova Brunsviga* à 10, 10 = 15 chiffres, qui permet sans nouvelle mise au point, de continuer les opérations sur le résultat obtenu.

On calculera au fur et à mesure les termes pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, etc., et l'on s'arrêtera quand la précision demandée sera atteinte.

Le plus souvent les trois premières différences sont suffisantes. La formule (8) restreinte à celles-ci est très simple.

$$f(x+\vartheta) = Y_1 + \frac{1}{2} \vartheta \varphi(Y_1 - Y_2)$$

C'est l'équation d'une parabole du troisième degré en ϑ qui passe par les quatre points correspondant à $\vartheta = -1, 0, 1, 2$.

On ne demande presque jamais une précision qui exigerait de tenir compte des différences au delà du neuvième ordre. La formule satisfaisante à cette condition est la suivante.

$$(9) \quad f(x+\vartheta) = Y_1 - \binom{\vartheta}{2} (Y_1 - Y_2) + \binom{\vartheta+1}{4} (2Y_1 - 3Y_2 + Y_3) + \binom{\vartheta+2}{6} - \\ - (5Y_1 - 9Y_2 + 5Y_3 - Y_4) + \binom{\vartheta+3}{8} (14Y_1 - 28Y_2 + 20Y_3 - 7Y_4 + Y_5)$$

C'est une parabole du neuvième degré passant par les 10 points correspondant à $\vartheta = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

L'interpolation à l'aide de la formule (8) nécessite un peu moins de calculs que la formule d'EVERETT sans les tables de THOMPSON; de plus elle permet d'interpolier même dans le cas où les différences ne sont pas données.

On pourrait encore abréger le calcul en dressant une table des grandeurs $C_n(\vartheta)$ pour $n = 1, 2, 3$, et 4; ce qui permettrait d'interpoler aussi facilement que par la formule d'EVERETT et les tables de THOMPSON; comme la formule (8) se passe des différences elle est plus avantageuse (1).

Mais même si une telle table n'est pas disponible, on peut calculer assez vite ces coefficients, en effet on obtient $C_n(\vartheta)$ de $C_{n-1}(\vartheta)$ en le multipliant par deux facteurs; en effet on a

$$C_n(\vartheta) = C_{n-1}(\vartheta) \frac{\vartheta+n-1}{2n} \cdot \frac{\varphi+n-1}{2n-1}$$

(1) Une telle table à dix décimales est en cours de construction. Voilà les trois premières lignes du Tableau :

0,001	0,0004995	0,0000432911	0,0000166611	0,0000035705
0,002	0,0004998	0,0001614993	0,0000333109	0,0000071392
0,003	0,0014955	0 0002496228	0,0000499494	0,0000107061

§ 4. Comme exemple choisissons celui donné dans les tables de la fonction Γ de LEGENDRE (2).

Soit à déterminer $\log \Gamma(1,0783649)$ à douze décimales. On trouve dans les tables mentionnées :

$$\begin{aligned} f(1,076) &= 9,982\ 938\ 662\ 977 & f(1,079) &= 9,981\ 343\ 524\ 262 \\ (10) \ f(1,077) &= 9,982\ 739\ 772\ 819 & f(1,080) &= 9,982\ 146\ 948\ 534 \\ f(1,078) &= 9,982\ 541\ 504\ 262 & f(1,081) &= 9,981\ 955\ 619\ 660 \end{aligned}$$

dans ce cas $\vartheta = 0,3649$ et $\varphi = 0,6351$.

On en tire

$$Y_1 = \vartheta f(1,079) + \varphi f(1,078) = 9,982469\ 417171\ 766$$

$$Y_2 = \frac{1}{3} [(1+\vartheta)f(1,080) + (1+\varphi)f(1,077)] = 9,982470\ 057301\ 345$$

$$Y_3 = \frac{1}{5} [(2+\vartheta)f(1,081) + (2+\varphi)f(1,076)] = 9,982471\ 338248\ 925$$

$$\frac{1}{5}\vartheta\varphi = 0,115873\ 995$$

$$\frac{1}{6} \binom{\vartheta+1}{2} \binom{\varphi+1}{2} = 0,021550\ 1296$$

Par suite

$$Y_1 = \qquad \qquad \qquad 9,982469\ 417171\ 766$$

$$\frac{1}{2}\vartheta\varphi(Y_1 - Y_2) = \qquad \qquad \qquad -\ 0,000000\ 074200\ 822$$

$$\frac{1}{6} \binom{\vartheta+1}{2} \binom{\varphi+1}{2} (2Y_1 - 3Y_2 + Y_3) = 0,000000\ 000014\ 836$$

$$\log \Gamma(1,0783649) = \underline{\underline{9,982469\ 342986}}$$

La douzième décimale est exacte, par contre en s'arrêtant au terme en Y_2 (troisièmes différences) on a encore une erreur de -15 unités de la douzième décimale. Comme les quatrièmes différences ne figurent pas dans la table de LEGENDRE, en employant la formule d'EVE-RETT il faudrait encore calculer ces différences pour que la précision demandée soit atteinte. Par contre l'emploi de la formule (8) rend superflue l'impression de 19000 chiffres dans les dix pages de la table de LEGENDRE.

En effectuant les calculs ci-dessus à l'aide d'une machine à calculer le résultat s'obtient très rapidement ; il est alors inutile de copier le tableau (10), il suffit de noter les résultats qui la suivent.

GIORGIO CAREGA

Alcuni dati demografici sugli Esquimesi.

I.

Groenlandia.

§ 1. *La prima colonizzazione della Groenlandia, le immigrazioni esquimesi, i contatti tra bianchi e indigeni e la colonizzazione moderna.* — § 2. *La popolazione della Groenlandia all'inizio della colonizzazione moderna.* — § 3. *Statistiche della popolazione indigena dal 1805 ad oggi e curva della popolazione* — § 4. *Natalità, fecondità, azione biologica degli incroci, ripartizione mensile delle nascite e mascolinità.* — § 5. *Mortalità, condizioni sanitarie, quozienti di mortalità.* — § 6. *Composizione per età, sesso e stato civile.* — § 7. *Conclusioni.*

§ 1. Quando nella prima metà del 900 i norvegesi cominciarono a raggrupparsi sotto l'autorità dei loro diversi principi, molti abitanti tra i più indipendenti ed irrequieti abbandonarono la patria ed andarono in cerca di fortuna in altre terre. Attraverso il mare del Nord i Vikinghi giunsero alle isole Ferøe e all'Islanda. Da quest'ultima terra cominciò la colonizzazione della parte meridionale della Groenlandia. Erik il Rosso condusse la prima emigrazione. Nel 986 sotto il suo comando 25 navi salparono verso le coste della Groenlandia ma solo 14 ne giunsero a destinazione. I coloni trasportarono con loro anche del bestiame, e vennero costruite fattorie, chiese ed abitazioni. Negli anni successivi vi furono altre numerose emigrazioni. Furono stabilite 16 parrocchie cattoliche di cui 12 sulla costa occidentale e quattro sull'orientale. La sede del vescovato era a Gardar, all'estremità del Fiordo di Eric. Senonchè le condizioni economiche della colonia intristirono.

Nel 1261 le colonie norvegesi rinunciarono spontaneamente alla loro indipendenza riconoscendo per capo il Re di Norvegia e si impegnarono a pagargli un tributo annuo. Disgraziatamente questo assoggettamento portò al risultato che i Re di Norvegia proibirono alle navi straniere di visitare la Groenlandia, e la miseria della Colonia

si accentuò. In seguito alla epidemia di peste europea del 1348-49 l'emigrazione norvegese diminuì. Coloro che conoscevano la via della Groenlandia si fecero sempre più rari, sinchè nel corso del 15° secolo le relazioni tra colonie e madre Patria a poco a poco cessarono del tutto.

Quasi contemporaneamente all'arrivo degli Scandinavi la Groenlandia era stata soggetta a tre grandi immigrazioni esquimesi.

Lo SCHULTZ LORENTZEN, che ha profondamente studiato la questione delle immigrazioni esquimesi in Groenlandia (*Meddelelser om Groenland*, Vol. XXVI, p. 241-330), parlando delle tre invasioni, dice che una prima ondata di esquimesi passata per lo stretto di Smith contornò la Groenlandia del Nord e scese lungo la costa orientale. L'avanguardia di questa colonna, doppiato il Capo Farewell, si stabilì nei distretti della costa Sud-Ovest ricchi di cacciagioni. Il restante, stabilitosi nella costa orientale, si andò poi a fondere con le tribù della costa Sud-occidentale, eccettuati gli esquimesi di Angmagalik che rimasero in questo distretto che abitano tuttora. La seconda ondata, dopo aver passato lo stretto di Smith, s'inoltrò tra la costa ed il ghiacciaio di Humboldt ed invase la Groenlandia dal Nord. Erano all'avanguardia le tribù che abitano oggi la parte mediana della costa occidentale e chiudevano il cammino quelle che oggi occupano Disko. Sulla terza invasione lo SCHULTZ LORENTZEN si dichiara incerto: probabilmente dalle antiche tribù della terza corrente migratoria discendono le odierne tribù di Upernavik.

Sulla fine dei coloni vennero avventurate le più diverse ipotesi. Il Dott. FRIDTJOF NANSEN (1) ha negato che i coloni siano stati sterminati, come da molti era stato creduto, dagli Esquimesi, ed ha sostenuto che tra i due gruppi si sono svolte relazioni pacifiche e si è quindi verificata anche una notevole commistione di razza.

Più recentemente nel fiordo di Herjolfsness presso la Baia di Sand vennero scoperti i resti di un cimitero cattolico del 1300 ed inizio del 1400. Vennero portati alla luce i relitti di circa 110 sepolture e 25 scheletri di antichi coloni normanni. Ora il Prof. C. C. HANSEN (2) in seguito ai suoi studi concluse che dall'esame di questi scheletri apparivano evidenti i segni di una notevole degenerazione fisica e di conseguenza sostenne che i coloni normanni della Groenlandia

(1) G. H. M. III, p. 459 ovvero *Nord. i Taakeheimen*, p. 364.

(2) « Meddel. om. Groenland ». PAUL NORLUND, *Buried Norsemen at Herjolfsness*; Prof. C. C. HANSEN, *Antropologia Medico historica Groenlandiae antiquae*.

si erano estinti per l'azione di una tale degenerazione, dovuta ai matrimoni tra consanguinei e ad una deficiente nutrizione. Inoltre non avendo rinvenuto nei 25 scheletri esaminati alcuna traccia di commistione di razza ne concluse che il contatto tra le due razze e la commistione, sostenuta dal NANSEN, non era avvenuta.

A maggior appoggio della sua affermazione portava il fatto che negli scavi del cimitero di Herjolfsness non si era trovato nessun oggetto esquimese, tranne una scatola di osso di balena.

Questa ipotesi è assai criticabile. Anzitutto appare evidente come sia arbitrario voler giudicare della sorte di centinaia di coloni in base ai risultati delle ricerche eseguite su 25 scheletri. E ciò tanto maggiormente se si pensa che tali risultati costituiscono a loro volta un'ipotesi e non una certezza scientifica. È probabilissimo che tra i coloni di Herjolfsness si sia verificata, per il loro isolamento, una degenerazione fisica. Ma perchè mai voler estendere tale probabilità, senza alcuna prova, a tutta la Colonia Normanna del Sud-Groenlandia? Il prof. HANSEN dice di non aver trovato traccia di incroci nei 25 scheletri esaminati. Non mi sembra vi sia nulla di strano in ciò se si pensa:

1) che i resti dei numerosi coloni normanni non possono essere certo spariti dalla superficie della Groenlandia;

2) che i mezzi-sangue seguivano la vita nomade del genitore indigeno e venivano educati negli usi esquimesi ed alla loro morte non erano certo sepolti in un cimitero cristiano. Inoltre può darsi benissimo che i coloni di Herjolfsness siano rimasti isolati dagli esquimesi giacchè a volte tra le due razze avvenivano scaramucce e brevi guerreglie. Dato questo è chiaro che non si siano trovati oggetti esquimesi nella necropoli di Herjolfsness. I contatti tra Scandinavi e indigeni nel Sud Groenlandia furono continui e certamente avvennero anche incroci. Ed i contatti furono tali che nel 1242 gran parte dei coloni, secondo gli annali del Vescovo GISLE ODDSON (1) abbandonarono la religione cristiana per quella esquimese... nè poca fatica ci volle per ricondurli alla religione cristiana. È quindi logico supporre un contatto fra i due gruppi, ed una conseguente commistione di razze. Questa circostanza danneggiava la teoria dell'HANSEN. Si cercò di porvi rimedio e si concluse che le croci rinvenute nel cimitero di Herjolfsness testimoniavano che l'apostasia non si era mai verificata.

(1) Cfr. NANSSEN, Op. cit.

Rimedio magro giacchè si sa che non tutti i coloni abbandonarono la loro fede. Inoltre Herjolsness appartiene al 1300 e primi anni del 1400, mentre i fatti di cui dianzi parlavo avvennero alla metà del 1200. Infine non è vero che i coloni si siano estinti rapidamente; infatti il CRANTZ dice che (1) il VESCOVO Amund fu spinto dalla tempesta, mentre ritornava in Norvegia, così vicino alla costa della Groenlandia che poteva vedere delle genti che conducevano il bestiame. Gli esquimesi, come si sa, non hanno mai allevato vaccine. Inoltre si sa che ancora nel 1546 o 1564 sussisteva un monastero (il monastero di San Bernardo) in Groenlandia. E numerose altre prove si possono trarre dalla storia della Groenlandia di DAVID CRANTZ.

Possiamo dunque concludere che gli esquimesi non sterminarono i coloni norvegesi, ma che nella maggior parte delle colonie i contatti tra le due razze avvennero e vi fu quindi una commistione di sangue. Molti autorevoli scienziati appoggiarono questa ipotesi. Il RINK nella sua interessantissima opera *Tales and Trades of Eskimos* osserva: « Le sembianze degli indigeni del Sud Groenlandia indicano un misto che discende da Scandinavi e da Esquimesi, i primi pur non avendo lasciato il minimo segno di influenza sulla nazionalità e cultura degli odierni indigeni.

Non è vero però che non sia rimasta proprio alcuna traccia di questo antico contatto con la civiltà, negli usi degli indigeni. Anzi il MASON (*Am. Anthr.*, XI, n. 356-1898) osserva a proposito dell'abilità degli esquimesi della Groenlandia nello scolpire l'avorio, che quest'arte è sorta fin dai primi contatti coi bianchi e deve il suo sviluppo all'introduzione del ferro da parte dei primi coloni. Anche nel linguaggio esquimese vennero trovate varie parole di origine scandinava.

Ho voluto portare queste prove a convalida della nostra ipotesi, cioè del lento assorbimento degli elementi scandinavi da parte dei forti gruppi esquimesi, in quanto questo fatto ritengo abbia avuto una notevolissima importanza riguardo alla demografia esquimese dei secoli successivi.

Tranne l'osservazione del MASON circa l'arte dello scolpire e tranne poche parole scandinave tra gli esquimesi della Groenlandia

(1) *Op. cit.*

mancano assolutamente tracce di usi e abitudini europee. Ciò non infirma però l'ipotesi suesposta giacchè è ormai provato che tutti i bianchi che si congiunsero con donne esquimesi costituirono le loro famiglie secondo il modello groenlandese con dei lievissimi miglioramenti suggeriti dalla civiltà, miglioramenti però effimeri, che di generazione in generazione si cancellarono. Insomma, stante le eccezionali condizioni di vita e di ambiente, l'influenza degli incroci si manifestò solo fisiologicamente (1).

Parecchi secoli dopo, invece, la colonizzazione in grande con metodi moderni s'imporrà sull'ambiente e produrrà notevoli mutamenti nella vita degli indigeni.

Dal 1400 al 1700 possiamo dunque dire che la Groenlandia venne quasi ignorata in Europa. Nel 1721 HANS EGEDE, un pastore luterano, sbarcò con la sua famiglia ed altri pochi compagni nell'estremità meridionale della Groenlandia per ricercare gli ipotetici discendenti dell'antica colonia. EGEDE era aiutato in questa impresa dal governo danese; senonchè non fu trovata la minima traccia dei bianchi, ed il pastore luterano si diede alla evangelizzazione degli indigeni. Fu fondata la stazione missionaria di Godthaab sul fiume Baal nella costa occidentale, a circa 64° Nord. HANS EGEDE fu posto a capo delle varie missioni che, in breve tempo, crebbero d'importanza e di numero. Ma i risultati sia nel lavoro di conversione, sia nel commercio, erano scarsi; il governo andava perdendo fiducia nell'impresa allorchè nel 1733 i Padri Moravi offrirono il loro aiuto. Nella primavera di quello stesso anno alcuni missionari moravi giunsero in Groenlandia per cooperare con EGEDE e riportarono tale successo che tutta l'opera passò sotto la loro denominazione. Tale cooperazione continuò anche dopo la morte di HANS EGEDE, cui successe nella direzione il figlio PAOLO.

Frattanto il governo danese aveva iniziato la sua politica di colonizzazione diretta (1774). La politica coloniale danese assunse fin dall'inizio un carattere monopolistico; solo le navi danesi possono

(1) Si comprenderà bene come ciò sia avvenuto quando si pensi che gli Scandinavi furono costretti dopo il contatto con gli esquimesi a imitarli sia nei metodi di caccia sia nella costruzione delle abitazioni estive ed invernali. Infatti la civiltà da cui essi provenivano ben poco poteva aiutarli là dove gli esquimesi erano anzi maestri. Era gioco forza nutrirsi di caccia e vivere nella neve. Gli insegnamenti della civiltà in un paese privo di vegetazione per le condizioni climatiche, in cui non era possibile nemmeno il minimo sfruttamento agricolo del suolo, potevano ben poco giovare ai coloni.

ancora oggi navigare nelle acque della Groenlandia. È ben difficile per uno straniero potervi accedere ed anche gli esploratori stranieri possono entrare in Groenlandia solo se raccomandati dal Governo del loro Paese. Il sistema del monopolio venne applicato collo scopo di cacciare dalle coste della Groenlandia i frequenti cacciatori di balene, inglesi ed olandesi.

Dopo che da parte di tutti gli Stati fu riconosciuto il monopolio, si conservarono queste severe disposizioni specialmente per proteggere la popolazione esquimese mantenendola immune da ogni contagio.

Infatti erano bastate poche dolorose esperienze a dimostrare quali gravi danni poteva recare al paese, e di conseguenza al commercio, il contatto con la civiltà. (Epidemia di vaiuolo, nel 1780, e di peste nel 1782-85, ambedue importate da navi straniere).

I Padri Moravi mantennero sino al 1900 le loro missioni nelle colonie di Godthaab e Iulianehaab. E' importante ricordare che essi proibirono sempre ai loro protetti le unioni con i bianchi e si adoperarono per mantenere pura la razza.

§ 2. Ci si pone ora il quesito: quale dovette essere in passato il numero dei Groenlandesi? La prima stima ci è stata fornita da HANS EGEDE e si riferisce ai primi anni della colonizzazione, intorno cioè al 1721. In quest'epoca EGEDE calcolò il numero degli esquimesi a circa 30.000. Ma varie considerazioni mi inducono a ritenere questa cifra esagerata.

Anzitutto è provato oggi che il cacciatore esquimese ha bisogno di territorio molto esteso, intorno a sè; senza un minimo di alcune miglia a sua disposizione egli non riesce ad accumulare nei mesi estivi le provviste di cacciagione necessarie per l'inverno. Ora l'habitat degli esquimesi in Groenlandia dal 1721 ad oggi si è mantenuto pressochè uguale. La popolazione odierna, per giunta, non è più dedita in parte alla caccia, nè d'altra parte è scarsa rispetto alle terre abitate. Possiamo perciò concludere che non sarebbe stata possibile, entro tali limiti di territorio, la vita a 30.000 persone che per giunta basavano la loro alimentazione esclusivamente sulla caccia. E siccome, l'habitat dei Groenlandesi si è mantenuto uguale, bisogna ritenere la cifra di 30.000 abitanti molto esagerata.

Si potrebbe obiettare che due secoli fa le riserve di caccia erano molto più abbondanti di oggi; non è certo che ciò sia vero, e d'altra parte, anche se lo fosse, bisogna pensare che due secoli fa i metodi di caccia erano assai primitivi. Le carestie capitavano di tanto

in tanto anche allora giacchè esse non sono affatto in rapporto con una presunta diminuzione della cacciagione. Durante queste carestie che avvenivano anzi più frequentemente di oggi, vi era in passato l'abitudine di uccidere i vecchi e i bambini. Tali stragi che oggi, fatta eccezione per gli Esquimesi polari o « Ita » non sono più che un ricordo in tutta la Groenlandia, rendevano la mortalità molto maggiore di oggi. Non vi è dubbio quindi sull'errore di EGEDE.

Egli, nel computo della popolazione, fu certamente indotto in errore dal fatto di aver trovato in alcune località molte capanne vuote ed in altri luoghi invece dei forti agglomeramenti di indigeni. Ed egli tenne calcolo di tutti, sia di quelli veduti in persona sia di quelli calcolati in base alle dimore vuote. Ma non pensò che gli Esquimesi, dopo aver per alcuni anni sfruttato un posto di caccia, lo lasciano e vanno a dimorare altrove abbandonando le loro abitazioni, e talvolta si concentrano in determinate località più ricche, ad una certa epoca, di selvaggina. Inoltre è pure probabile, ed è del resto logico, che l'EGEDE non sia stato imparziale nei suoi calcoli giacchè gli conveniva, per continuare ad avere l'appoggio della Danimarca, mostrare al Governo una Groenlandia ricca non solo di caccia, ma anche di eventuale mano d'opera locale. Il PORSILD ritiene (1) giusta per il 1721 una cifra di 6000 a 8000 individui. DAVID CRANTZ nella sua *Storia della Groenlandia* riferisce la stima di un commerciante che nel 1715 aveva viaggiato in quelle regioni: si parla qui di 7000 abitanti. Il CRANTZ ritiene giusta la stima di EGEDE e ritiene che il numero di 30.000 abitanti sia sceso in breve tempo a meno di un terzo. Questo giudizio è del tutto fantastico, e ritengo come la più vicina alla realtà la stima del PORSILD. Anche NANSSEN non attribuisce alcun valore al giudizio di EGEDE.

§ 3. Dal 1534 al 1805 mancano dati statistici sulla popolazione della Groenlandia. Abbiamo stabilita la popolazione complessiva nel 1734 in 6000-8000 abitanti. Nel 1805 venne eseguito un censimento che diede questi risultati:

Sud Groenlandia: 3.516 abitanti, Nord-Groenlandia 2.530, totale 6046. Tra il 1734 e il 1805 dunque la popolazione fu quasi in equilibrio o decrebbe di poco.

(1) SAPPER, *Nachrichten über Zukunftsaussichten der Eskimobevölkerung von Labrador und Groenland*, « Petermanns Geogr. Mitteil ». V. 64, p. 210.

Ecco i risultati dei successivi censimenti :

Anni	Nord Groenl	Sud Groenl.	Intera Costa Ovest
1805	2530	3516	6046
1834	2468	4888	7356
1840	2747	5130	7877
1845	2969	5532	8501
1850	3233	—	—
1855	3516	6132	9648
1860	3739	5909	9648
1870	4019	5567	9586
1880	4263	5457	9720
1890	4600	5607	10207
1901	5138	6052	11190
1902	5858	6652	12510
1921	6015	7386	13401
1924	6253	7700	13953

Nello spazio di 100 anni la popolazione si è raddoppiata. Circa il ristagno nel periodo tra il 1734 e il 1805 poco si può dire con certezza : ai tempi dell'Egede fu importato in Groenlandia il vaiuolo che mietè circa 2000-3000 vittime; tra il 1782 e il 1785 inferì la peste, nel 1800 nuovamente il vaiuolo e nel 1805 vi fu una forte carestia accompagnata da una malattia sconosciuta. In seguito alla rigida applicazione del monopolio si riuscì ad evitare gran parte delle epidemie.

Prima di passare alle statistiche di Angmagsalik occorrerà ricordare che la Colonia Danese nella costa occidentale si divide in due parti : Ispettorato del Sud (tra il 60° e il 67° Nord) e l'Ispettorato del Nord (tra il 67° e il 75° Nord). La costa orientale è inospitale ed è abitata solo in Angmagsalik. La colonizzazione del Fiordo di Scoresby avvenuta in questi due ultimi anni, è ancora un esperimento (1).

(1) Vedi conferenza MIKKELSEN. « Géographie », n. 3-4, 1926, Parigi.

Ebbe inizio nel 1925; nel settembre di questo anno a cura del MIK-KELSEN vennero trasportati al Fiordo di Scoresby 90 coloni da Angmagsalik, uomini donne e bimbi. Sarà interessante seguire i risultati di questo tentativo, giacchè si parla già di un... problema demografico per i Groenlandesi. Certo senza esagerarne il valore, le cifre dianzi riportate, mostrano un deciso aumento di popolazione che, date le condizioni di vita degli Esquimesi, per cui sono necessarie al loro sostentamento così vaste zone di territorio, può dare di già da pensare alla madre-patria. I censimenti dell'unica colonia orientale: Angmagsalik, abbracciano un periodo assai breve. Inoltre in due anni, la nave che portava in patria le notizie andò persa. L'inizio della colonizzazione avvenne nel 1894, anno a cui risale il primo censimento. Tolgo i seguenti dati dal SAPPER (Op. cit.) per il periodo 1894-1915, e i dati successivi dal « Meddel. om Groenland » e dallo « Statistisk Aarbog ».

Abitanti esquimesi di Angmagsalik

anni	abitanti	anni	abitanti	anni	abitanti	anni	abitanti
1894	235	1901	436	1908	545	1915	602
1895	247	1902	448	1909	554	1918	637
1896	372	1903	428	1910	?	1921	680
1897	372	1904	474	1911	576	1924	735
1898	358	1905	501	1912	593		.
1899	403	1906	?	1913	602		
1900	411	1907	539	1914	509		

Come risulta dai dati, la popolazione nel trentennio 1894-1924 si è triplicata. Ciò è dovuto, come vedremo poi, ad un forte vantaggio della natalità sulla mortalità assai bassa. L'incremento annuo è andato però leggermente calando. Infatti tra il 1901 ed il 1911 fu del 2,74% e tra il 1911 ed il 1921 fu dell'1,87% (1). Bisognerà ora osservare:

1) gli esquimesi di Angmagsalik ebbero anch'essi all'epoca della prima colonizzazione contatti con i bianchi che avevano fondato 4 parrocchie sulla costa orientale, e per quanto non sia accertato, si può supporre che avvennero incroci.

(1) *Folketaellingen i Groenland 1921.*

2) La costa orientale è malamente accessibile ed è raramente visitata da navi straniere. I contagi furono perciò rari, ed in Angmagsalik si riscontrarono sempre ottime condizioni sanitarie.

Oggigiorno gli incroci con i bianchi in Angmagsalik sono già numerosi.

Ad ogni modo il piccolo numero degli esquimesi orientali (nel 1894 essi erano 235) mentre da una parte conferisce poco valore alle conseguenze che si possono trarre dall'esame dei dati sulla natalità, mortalità ed incremento, d'altra parte fa pensare che, anteriormente alla colonizzazione moderna, queste tribù dovevano essere numericamente stazionarie o in diminuzione. E ciò appare tanto più chiaro, se si pensa che gli esquimesi di Angmagsalik abitano quella località dal 1000 circa, e che un tempo dovettero essere assai più numerosi.

Abbiamo sinora parlato degli esquimesi della Costa Ovest e di quelli della Costa Est. Resta ora a parlare di un piccolo gruppo di indigeni che abitano le terre comprese tra il 76° e il 79° L. N. e che costituiscono il gruppo umano più nordico del globo. Per questa ragione sono stati chiamati « Esquimesi Polari ». Essi si differenziano notevolmente dagli altri Esquimesi della Groenlandia. La prima notizia che si ha di essi risale al 1818, anno in cui essi furono scoperti da JOHN ROSS (1).

KANE nel 1854 li stimava circa 150. HAYES nel 1861 circa 100. Ma queste prime cifre non sono del tutto attendibili e sono state ritenute scarse. PEARY nel 1895 ne contò 253 e nel 1897, 234. Nel 1928 un'inchiesta ha dato il numero di 235 e nel 1924 essi sono stati stimati 257.

Questo gruppo di Esquimesi era, fino al principio del 1900, di razza purissima. Oggi vi sono già varî incroci (2).

Come si è visto il numero degli Esquimesi Polari è stazionario. La posizione di equilibrio tra nascite e morti è però tutt'altro che favorevole per queste genti giacchè basta il minimo focolaio di epidemia per alterarla, e produrre un fatale movimento verso l'estinzione.

Seguendo sul grafico (3) che ho costruito in base ai dati del SAPPER, l'aumento della popolazione indigena Groenlandese, avvenuto

(1) JOHN ROSS, *A voyage of discovery etc.*, Londra 1819.

(2) *Contributions to the Ethnology and Anthropogeography of the Polar Eskimos* H. P. STEENSBY. « Medd. om. Groenland », XXXIV.

(3) Vedi, pag. 67.

tra il 1805 ed il 1915, si vede che la popolazione del Nord Groenlandia subì una lieve decrescenza tra il 1805 ed il 1830. Ritengo che in parte essa sia stata causata dall'epidemia di una ignota malattia che nel 1805 e 1806 colpì la costa e che fu accompagnata da una forte carestia (1). Attraverso lievi oscillazioni (la maggiore avvenne nel 1866-67: il numero degli abitanti diminuì da 3986 a 3871) l'aumento si è intensificato. Nel diagramma relativo al Sud Groenlandia troviamo invece una notevole discesa che ha inizio nel 1850: la curva si abbassa sino al 1864; dopo alcune oscillazioni, discende ancora e tocca il minimo nel 1876. Riprende quindi il suo movimento ascendente che mantiene costante. Il regresso cui ho ora accennato, che si nota nel Nord nel 1867, è dovuto al forte sbilancio che si verificò in quell'anno tra la mortalità che fu del 57 p. mille e la natalità che segnò un minimo di 28 p. mille. La prima probabilmente influì sulla seconda colpendo le classi d'età più atte alla riproduzione.

La spiegazione del regresso che si è verificato nel Sud tra il 1850 ed il 1876 ci è data dalle seguenti cifre sulla natalità e mortalità nel periodo 1861-1875.

Mancano i dati nel primo periodo 1850-1860, ma credo che i seguenti siano più che sufficienti ad illuminarci in proposito.

Anni	Nati	Morti	Anni	Nati	Morti
1861	33	48	1869	37	35
1862	33	48	1870	45	30
1863	36	44	1871	45	58
1864	36	66	1872	34	41
1865	39	32	1873	48	48
1866	43	34	1874	39	29
1867	38	51	1875	40	68
1868	33	35	1861-1875	40,2	45,9

La mortalità fu così alta solo nel Sud Groenlandia perchè nel medesimo periodo 1861-1875 nel Nord Groenlandia si ebbe una mortalità media di 31,4 ed una natalità media di 34,4. Circa le cause

(1) Confr. SAPPER, *Op. cit.*

di una così alta mortalità non ho potuto assodare niente di preciso. Ho riscontrato nei censimenti pubblicati dall'Ufficio Statistico di Copenaghen che la diminuzione nel numero degli indigeni avvenne nelle colonie di Holstensborg, di Godthaab, Julianehaab ed in ragione più lieve in quella di Frederikshaab. Fecero eccezione le colonie di Sukkertoppen e di Ivigtut in cui si verificò anche un aumento. Ecco il prospetto dei censiti nelle varie colonie :

Anni	Godthaab	Julianehaab	Holsten- sborg	Frederik- shaab	Sukket- toppen	Ivigtut
1860	1230	2637	676	785	705	—
1870	999	2570	545	771	765	50
1880	946	2308	585	754	955	11

Da queste cifre si nota che la diminuzione si fece sentire particolarmente nelle colonie di Godthaab e di Julianehaab. Ho già osservato come in queste colonie, accanto alla popolazione molto incrociata, vi sia un forte numero di esquimesi di razza più pura che furono sino al 1900 sotto la protezione dei Padri Moravi. Essi sono suddivisi in quattro colonie : Ny Herrenhute e Lichtenfels, che fanno parte della colonia di Godthaab, e Lichtenau e Frederiksdal che fanno parte di Julianehaab. Ho voluto osservare allora la curva della popolazione in questa singola località. Ecco i risultati :

Colonie dirette dai Padri Moravi : numero degli indigeni censiti negli anni :

		1860	1870	1880	1890
Ny Herrenhute	Godthaab	420	316	264	270
Lichtenfels		291	221	202	171
Lichtenau	Julianehaab	729	658	647	663
Frederiksdal		505	491	390	496
<i>Totale</i>		1945	1686	1503	1600

Ora nella colonia di Godthaab tra il 1860 e il 1880 si era avuta una diminuzione di 284 individui. Questa diminuzione è avvenuta però quasi interamente nei distretti colonizzati dai P. Moravi, dove in questo periodo si è avuta una diminuzione di 245 individui.

Nella colonia di Julianehaab si è avuta una diminuzione di 329 individui. Per quasi due terzi essa è avvenuta nei distretti dei Padri Moravi dove la diminuzione è stata di 193 individui.

Faccio presente che la popolazione indigena di Godthaab som-
mava nel 1860 a 1230 individui di cui 711 appartenevano alle colonie morave in cui si verificò la diminuzione suddetta, e che la popolazione indigena di Julianehaab contava, pure nel 1860, 2637 individui di cui 1240 appartenevano alle colonie morave.

Rinuncio per mancanza di dati a ricercare a quali cause (probabilmente epidemie) si deve l'alta mortalità che causò la diminuzione, ma ritengo interessante quanto ho ora osservato, giacchè risulta che la morte falciò particolarmente il gruppo di indigeni puro-sangue il cui organismo offre, come vedremo, una debole resistenza agli agenti patogeni.

Dal 1896 in poi le oscillazioni della curva sono state minime. Ciò è in relazione con l'andamento sempre più regolare dell'aumento. Seguono i dati ed il grafico (1). Tali dati differiscono lievemente dai dati dei censimenti ufficiali decennali già riportati, probabilmente perchè eseguiti in epoche diverse dello stesso anno.

§ 4. È stato osservato in Danimarca che la natalità degli Esquimesi della Groenlandia è molto alta e supera, ad esempio, di molto la natalità di molte popolazioni bianche.

I seguenti dati (2) sul Nord Groenlandia e sul Sud Groenlandia sembrerebbero confermare tale osservazione:

(1) Confr. SAPPER, *Op. cit.*

(2) Ho tratto i dati che rispecchiano il periodo 1861-1865 dal SAPPER (*op. cit.*) e quelli riguardo il periodo 1912-1921 dal censimento della Groenlandia del 1921.

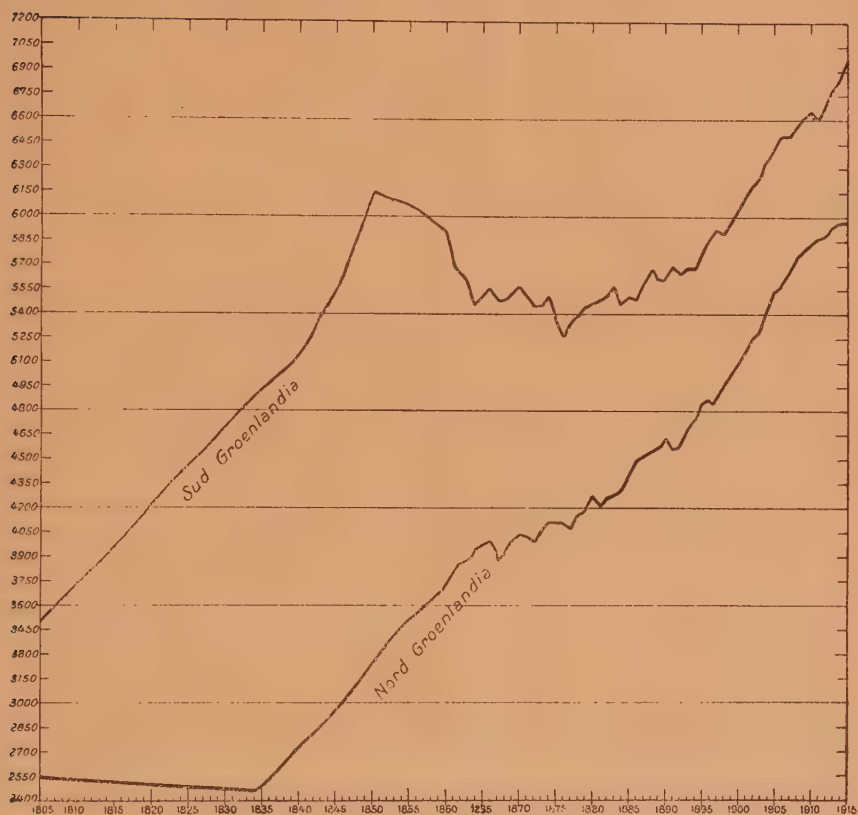
Numero degli Esquimesi della Groelandia dal 1805 al 1915.

Anni	Ispettorato del Sud 60 - 67° Nord	Ispettorato del Nord 67 - 75° Nord	Intera costa occidentale colonizzata
1721	—	—	30000 (?)
1805	3516	2530	6046
1820	—	—	6286
1830	—	—	6997
1834	4888	2468	7356
1840	5130	2747	7877
1861	5744	3809	9553
1862	5655	3847	9502
1863	5605	3886	9491
1864	5460	3944	9404
1865	5503	3978	9481
1866	5557	3986	9543
1867	5481	3871	9352
1868	5484	3919	9403
1869	5511	3990	9501
1870	5585	4030	9615
1871	5519	4026	9545
1872	5446	3995	9441
1873	5453	4060	9513
1874	5512	4115	9627
1875	5360	4113	9473
1876	5258	4119	9377
1877	5339	4069	9408
1878	5387	4144	9531
1879	5441	4192	9633
1880	5475	4276	9751
1881	5484	4217	9701
1882	5503	4254	9757
1883	5566	4278	9844
1884	5469	4328	9797
1885	5500	4414	9914

Numero degli Esquimesi della Groenlandia dal 1805 al 1915.

Anni	Ispettorato del Sud 60 - 67° Nord	Ispettorato del Nord 67 - 75° Nord	Intera costa occidentale colonizzata
1886	5486	4497	9983
1887	5586	4536	10122
1888	5679	4542	10221
1889	5614	4563	10177
1890	5636	4618	10254
1891	5691	4553	10244
1892	5634	4573	10207
1893	5677	4691	10368
1894	5678	4749	10427
1895	5777	4862	10639
1896	5858	4897	10755
1897	5929	4867	10796
1898	5916	4960	10876
1899	5951	5023	10974
1900	6032	5086	11118
1901	6116	5167	11283
1902	6196	5257	11453
1903	6240	5297	11537
1904	6363	5427	11790
1905	6420	5539	11959
1906	6504	5580	12084
1907	6511	5655	12166
1908	6573	5746	12319
1909	6619	5795	12414
1910	6650	5839	12489
1911	6613	5869	12482
1912	6674	5880	12554
1913	6789	5956	12745
1914	6848	5964	12812
1915	6970	5969	12939

**Aumento della popolazione esquimese della Groenlandia
tra il 1805 ed il 1915.**



Natalità per 1000 abitanti

A n n i	Nord Groenlandia	Sud Groenlandia
1861 - 1875	34,0	40,2
1876 - 1885	34,6	40,1
1886 - 1895	36,8	40,1
1896 - 1905	39,6	39,4
1906 - 1915	39,1	40,6
1912 - 1921	37,6	41,8

Senonchè l'esame della mortalità in Groenlandia ci insegna che i quozienti di mortalità nelle classi adulte degli Esquimesi sono altissimi. Ora (1), ad incrementi di mortalità nel gruppo, che comprende gli individui d'età superiore ai 50 anni, si può affermare che corrispondono variazioni dello stesso segno nel tasso di natalità.

In altre parole l'alta mortalità nelle classi più adulte viene ad eliminare dall'ammontare della popolazione gli individui meno o non atti alla riproduzione, e risparmia invece gli individui che per la loro età sono più atti a tale funzione. Ciò invece non accade nelle popolazioni bianche dove la vita media, essendo maggiore, lascia molti individui non più atti alla riproduzione. Cosicchè tra gli Esquimesi, il denominatore della frazione esprimente la natalità è minore di quello che sarebbe ove la mortalità nelle classi adulte fosse normale. Diminuendo il denominatore, l'aliquota cresce. Ecco perchè la natalità ci sembra così alta.

Dai dati che ho riportato appare come nel periodo tra il 1861 ed il 1921 mentre nel Sud Groenlandia la natalità ha oscillato intorno al 40 per mille ed è salita dopo il 1900 sino a raggiungere quasi il 42 per mille nel 1912-21, nel Nord Groenlandia invece essa è ascisa dal 33,4 per mille (1861-1875) al 37,6 per mille (1912-21) toccando un massimo di 39,6 per mille nel 1896-1905.

Tale aumento nel Nord e nel Sud, deve essere stato maggiore di quanto non appare per il motivo che contemporaneamente ad esso si è verificata (come risulta dall'esame della composizione per età della popolazione in successive epoche) una diminuzione di mortalità nelle

(1) Confr. A. BENEDEUCE, *Della natalità*, 1908, Roma.

classi più adulte. Questo fatto avrebbe dovuto portare, se la natalità fosse rimasta stazionaria, una diminuzione dell'aliquota.

Ammettendo un lieve aumento della mortalità questo avrebbe potuto esser controbilanciato nella frazione dall'aumento subito dal denominatore per il maggior numero di viventi nelle età più adulte. In realtà l'aliquota è cresciuta e possiamo concludere che, essendo cresciuto per i detti motivi anche il denominatore, la natalità deve essere aumentata più di quanto non risulti dalle precedenti cifre.

Quanto ho detto è provato dall'esame della fecondità. La scarsità dei dati non consente uno studio minuzioso della fecondità nei due sessi in Groenlandia. Ho potuto calcolare i seguenti dati sulla fecondità legittima (1).

Ho calcolato in successivi decenni la media annua del numero dei nati, paragonandola al numero delle coniugate tra i 15 ed i 45 anni, censite alla metà del decennio. (Il numero delle nascite illegittime è secondo il BERTELSEN (2) minore del 5 % delle totali ed è quindi trascurabile; d'altra parte mancano i dati separati per le nascite legittime ed illegittime).

Numero medio annuo dei parti per 1000 coniugate tra 15-45 anni

A n n i	Nord Groenlandia	Sud Groenlandia
1875 - 1884	282	312
1885 - 1894	293	324
1896 - 1905	303	319
1906 - 1915	327	348

Ho calcolato in base al SUNDBARG (3) la fecondità legittima in Svezia negli stessi anni. Ho ottenuto queste cifre:

1876-85	298
1886-95	284
1896-1905	273

Nel 1876-1885 la fecondità legittima in Svezia era dunque maggiore che nella Groenlandia del Nord.

(1) Rapporto tra il numero dei nati legittimi ed il numero delle coniugate tra 15-45 anni.

(2) BERTELSEN, *Some statistics of the native population in Groenland*. « *Métron* », I, n. 4.

(3) SUNDBAERG, *Aperçus statistiques internationaux*. Stockolm, 1906.

La natalità in quel decennio nella Groenlandia del Nord fu pari a 34 per mille. La Svezia invece nel decennio 1871-1880 ebbe una natalità del 30,5 per mille e nel decennio 1881-1890 del 29 per mille.

Ed ancora: nei Paesi Bassi si hanno i seguenti dati sulla natalità e sulla fecondità:

Anni 1871-1880	fecondità legittima	367	nati per 1000 ab.	35,1
» 1891-1900	»	»	342	» » » 31,5

Possiamo quindi ritenere approssimativamente che se in Groenlandia, considerandola complessivamente, la mortalità fosse normale la natalità si aggirerebbe intorno al 30 per mille.

Il BERTELSEN (1) ritiene che il potere genesiaco sia pressochè uguale negli indigeni puri e negli incrociati. Io ritengo invece che l'aumento della natalità verificatosi nella Groenlandia settentrionale sia dovuto precisamente all'effetto dei successivi e sempre più numerosi incroci.

Ma come mai, invece, tale aumento nella Groenlandia meridionale si è verificato (in piccola misura) dopo il 1900, e perchè quivi la natalità è stata sempre più alta che nel Nord? Quanto alla prima questione la soluzione c'è data dal fatto che nel 1900 vennero tolte le missioni dei Padri Moravi che avevano sempre proibito ed evitato gli incroci con i bianchi, e si verificò negli anni successivi un aumento della percentuale di sangue misti nella popolazione totale. Il solo modo di spiegarci poi la più alta natalità che si riscontra nel sud della Groenlandia è quello di pensare al lungo periodo di contatto che questi indigeni ebbero con i bianchi tra il 1000 ed il 1500. La loro crisi demografica fu certamente arrestata dall'immigrazione dei bianchi che, attraverso gli incroci con gli indigeni, portarono un contributo di sangue giovane e quindi di nuove forze, alla decadente razza esquimese, dando così un incremento alla natalità che era certamente in via di crescente diminuzione.

A convalida di questa ipotesi citerò alcuni fatti significativi: nella colonia di Godthaab (Groenlandia Meridionale), nella parte colonizzata dai Padri Moravi, vi fu, in media del periodo 1861-1891, una natalità del 31 % contro una natalità del 37 % nella parte sottoposta direttamente al governo Danese; ora si sa che nei comuni dei Padri Moravi si cercò di mantenere pura la razza. Si può quindi at-

(1) BERTELSEN, *Op. cit.*

tribuire la differenza del 6 % al rilevante numero di incroci avvenuti nei comuni Danesi e nello stesso modo mettendo a confronto la natalità degli esquimesi così detti « puri » del Sud Groenlandia con quella degli esquimesi polari (veramente « puri ») si può attribuire la maggior capacità riproduttiva dei primi all'antica fusione di razze di cui, attraverso le successive generazioni, si è quasi cancellata ogni traccia somatica.

In media poi del periodo 1892-1900 la natalità fu nelle colonie Danesi del 36 per mille ed in quelle dei Padri Moravi del 32 per mille; disgraziatamente non esiste alcun dato sul tasso di nascita che permetta di confrontare la natalità degli esquimesi puri e dei sangue misti, nel Nord: tale confronto, probabilmente, metterebbe maggiormente in luce la diversa capacità di riproduzione.

L'incremento del tasso di nascita nel Nord che ritengo causato dai crescenti incroci è infatti parallelo all'aumentare di questi, come risulta dai seguenti dati che mi sono stati cortesemente inviati dal Prof. ADOLPH JENSEN, direttore del Dipartimento di Statistica della Danimarca.

Percentuale di sangue misto nella popolazione totale

Groenlandia del Nord	}	1820	25 %	
		1860	50 »	
		1901	63 »	
Groenlandia del Sud	}	1820	12 »	(1)
		1855	27 »	(1)
		1921	25 »	

Nei riguardi della natalità è inoltre molto significativo l'esame della composizione per età della popolazione dividendo questa nei due gruppi: esquimesi puri e sangue-misti. I censimenti eseguiti in Groenlandia, tranne quello del 1901, non considerano separatamente questi due gruppi; la distinzione in realtà è ben difficile a farsi giacchè, ad esempio, degli incroci avvenuti nel Sud Groenlandia all'epoca della prima colonizzazione non si trovano nella popolazione odierna tracce somatiche nette.

Il cambiamento somatico prodotto dall'incrocio con i bianchi è

(1) Non sono comprese le missioni dei fratelli Moravi la cui popolazione, come ho detto, è meno incrociata.

caratterizzato, come risulta dalla letteratura (1), dall'attenuarsi della dolicocefalia e da un aumento di statura. Ma di generazione in generazione se non avvengono successivi incroci tale cambiamento si va vieppiù attenuando sino a scomparire. Così è avvenuto nella Groenlandia del Sud.

Il censimento del 1901 distingue (la distinzione venne fatta in base ad informazioni dei funzionari del Commercio in Groenlandia, e senza alcuna base scientifica) gli esquimesi puri dai sangue-misti; la distinzione è esatta per gli indigeni della Groenlandia del Nord, mentre invece è inesatto parlare di esquimesi puri nella Groenlandia del Sud dove gli indigeni risentono fisiologicamente degli antichi incroci con i bianchi, pur essendosi cancellata ogni traccia somatica.

Sussiste però sempre una notevole differenza tra il gruppo cosiddetto degli esquimesi puri, che è costituito da elementi realmente più puri, discendenti, senza recenti commistioni di sangue, dai gruppi esquimesi che, come s'è già visto, si erano incrociati con i primi coloni, ed il gruppo dei sangue-misti, discendenti dagli stessi gruppi, ma che contano tra i loro ascendenti (recentemente, durante la colonizzazione moderna) dei bianchi, e che perciò, a differenza dei primi, maggiormente risentono degli effetti cui ho ora accennato.

In base ai dati del censimento del 1901 risulta che negli esquimesi di sangue incrociato le classi dei giovani sono molto più folte che negli esquimesi puri; il gruppo 0-10 anni costituisce il 31,3% della popolazione totale incrociata, mentre lo stesso gruppo nella popolazione pura costituisce il 23,9 %. Ciò può far pensare ad una natalità debole nella razza pura in confronto alla natalità alta ed in aumento nella razza incrociata.

Si potrebbe anche però pensare che la maggiore importanza dell'aliquota delle classi giovani, nei sangue-misti, possa essere causata da una maggior mortalità nelle classi adulte o da una vita media più breve. Senonchè il parallelismo tra aumento della percentuale degli incroci ed aumento della natalità, gli indubbi benefici effetti degli incroci dal punto di vista sanitario, la crescente diminuzione di mortalità parallela al crescere degli incroci, m'inducono ad interpretare

(1) S. HANSEN, *Bidrag till Vestgrønlaenders Anthropologie*. «Medd. om Groen». VX.

la maggiore importanza delle classi giovani come sintomo di più potente natalità.

Groenlandia (1901) - Composizione percentuale della popolazione per età.

A n n i	Esquimesi puri	Sangue misto	A n n i	Esquimesi puri	Sangue misto
0 - 5	12,3	16,8	45 - 50	5,3	3,7
5 - 10	11,6	14,5	50 - 55	5,2	3,2
10 - 15	10,6	11,2	55 - 60	3,3	2,2
15 - 20	9,9	10,5	60 - 65	2,1	1,5
20 - 25	9,9	9,2	65 - 70	1,3	0,9
25 - 30	8,1	8,9	70 - 75	0,3	0,5
30 - 35	7,3	6,7	75 - 80	0,1	0,1
35 - 40	6,4	5,4	80 - 85	0,01	0,06
40 - 45	6,3	4,5		100	100

Quanto agli esquimesi orientali la natalità appare tra loro altissima.

Nati per 1000 abitanti

1901	62 ‰	1906	(?)	1911	64 ‰
1902	42 ‰	1907	58 ‰	1912	52 ‰
1903	70 ‰	1908	38 ‰	1913	43 ‰
1904	46 ‰	1909	49 ‰	1914	62 ‰
1905	54 ‰	1910	(?)	1915	41 ‰

Tra il 1906 ed il 1915 si ebbe una natalità media annua del 52 per mille. Se si pensa che tra il 1912-1921 la fecondità fu uguale a 325,5 appare chiaro come nella Groenlandia orientale una ancora maggiore mortalità nelle classi sopra i 50 anni renda la natalità più alta che nell'Ovest, mentre in realtà la fecondità è minore.

Circa il piccolo gruppo degli esquimesi polari non esiste alcun dato sulla natalità tra essi per potere giudicare direttamente del loro potere riproduttivo: ma l'analisi della composizione per età della loro popolazione, che in seguito tratterò, mostra una struttura demografica poco solida ed una natalità decrescente.

Ad esempio, nel 1924 la classe 0-5 anni costituiva il 14 % della popolazione totale mentre la classe successiva (5-10 anni) costituiva il 17 %.

Questa considerazione, unita poi al fatto della stazionarietà del loro numero, ci prova quanto debba essere bassa tra loro la fecondità.

Interessante si presenta la ripartizione mensile delle nascite. Dai dati pubblicati nel censimento del 1921 risulta che la più alta natalità si verifica nel periodo giugno-settembre e la più bassa nel periodo febbraio-maggio. Si avrebbe perciò un massimo di concepimenti nel periodo ottobre-gennaio ed un minimo nel giugno-settembre. Ma il BERTELSEN (*op. cit.*), mentre i dati pubblicati nel censimento della Groenlandia si riferivano al 1919-1921 per il Sud Groenlandia ed al 1917-20 per il Nord, studiò la ripartizione mensile delle nascite esaminando un periodo molto più vasto (1851-1900) ed ottenne questi valori :

Su 100 nascite dell'anno ne avvennero in

Gennaio	9,4	Aprile	8,2	Luglio	8,4	Ottobre	7,6
Febbraio	9,2	Maggio	8,5	Agosto	7,7	Novembre	7,8
Marzo	9	Giugno	8	Settembre	8,1	Dicembre	8,1

Appare subito come il periodo in cui la natalità è più alta è quello che va dal gennaio al marzo. Il corrispondente periodo di maggiore concepimento va dunque da aprile a giugno. Anche nella curva stagionale delle nascite della Groenlandia si nota l'influenza della primavera.

Il periodo di minori concepimenti è quello che va dall'ottobre al marzo. Nel « Journal d'ostétrique et de gynécologie » del 20 agosto 1905 il Dr. COOK osservava che durante la notte polare nelle donne esquimesi non avvenivano le mestruazioni ed in ambo i sessi l'istinto sessuale si addormentava sino al ritorno del sole e che quindi tutti i concepimenti datavano da quell'epoca. L'esagerazione è palese. Per quanto minimo v'è però un fondo di verità: gli esquimesi durante la lunga notte polare vivono chiusi nelle loro case di neve (igloo) mangiando poco e dormendo moltissimo. Si riscontra quasi un principio di ibernazione. La scarsenza dei concepimenti nei mesi invernali credo si possa attribuire, come osservò il BERTELSEN, alla scarsa nutrizione degli indigeni ed al conseguente indebolimento degli organismi. Quanto ai periodi mestruali delle donne esquimesi il VON

BISCHOFF (1) cita le testimonianze dei due conosciuti ostetrici francesi TARDIEU e VALPEAU, secondo i quali le donne esquimesi sarebbero soggette a periodi mestruali che si manifesterebbero solo ogni tre mesi e talvolta anche solamente due o tre volte l'anno. Inoltre riporta il parere del GUERALT secondo il quale le mestruazioni cesserebbero durante l'inverno e nei periodi di carestia. È indubbio che uno stato di notevole denutrizione possa rendere irregolare o anche sospendere la mestruazione; ma sono questi casi rarissimi. Infatti il Dr. BERTELSEN, cui avevo chiesto notizie in proposito, mi ha fatto gentilmente sapere che egli non ha mai avuto, in 25 anni di esercizio medico nella Groenlandia, occasione di constatare tali anomalie.

La distribuzione delle nascite in Groenlandia è perfettamente normale; il FIRKS ha osservato però che nell'alto Nord i nati sembravano dividersi in proporzioni pressochè uguali tra i due sessi.

A prova di questo egli portava il fatto che nel 1895 in Groenlandia erano nati 222 maschi e 227 femmine!

Il Prof. GINI, nel suo volume *Il sesso dal punto di vista statistico*, dimostrò con dati comunicatigli dall'Ufficio statistico di Danimarca, che la distribuzione delle nascite in Groenlandia era invece, perfettamente normale.

Trascrivo i dati del Prof. GINI che giungono sino al 1903 e unisco i dati successivi sino al 1923.

Anni	1884 - 1890	maschi per 100 femmine	109,4
»	1891 - 1897	» » »	102,2
»	1898 - 1903	» » »	107
»	1904 - 1910	» » »	105
»	1911 - 1917	» » »	107
»	1918 - 1923	» » »	104

Nel periodo 1851-1900 la proporzione nelle nascite dei maschi alle femmine fu di 106 a 100.

Nel Nord Groenlandia la proporzione (105 a 100) fu minore che nel Sud (107 a 100). Esaminando il periodo 1902-1921 vediamo che la situazione si è invertita (Nord: 106 a 100, Sud: 104 a 100). Ver-

(1) « Sitzungsberichte der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften zu München ». Math. Phys. Classe 1882, XII, pag. 143.

rebbe fatto di pensare ad una correlazione tra le variazioni della mascolinità e le variazioni raziali che si attuano attraverso gli incroci. La questione sarebbe assai interessante ma occorrerebbero i dati anche per gli altri gruppi esquimesi del Labrador, Alaska, ecc.. Ma tali dati non esistono.

La proporzione tra i due sessi si inverte poi nelle classi adulte a favore delle donne, in maggior misura che nelle altre popolazioni, per l'alta mortalità nelle classi adulte dei maschi, le cui cause in seguito vedremo.

§ 5. La mortalità tra esquimesi è particolarmente alta. Vediamo ora quali variazioni vi sono state nella mortalità tra il 1861 ed oggi.

Morti per 1000 abitanti in media annua dei periodi

	Nord Groenlandia	Sud Groenlandia
1861 - 1875	31,4	45,9
1876 - 1885	28,4	37,5
1886 - 1895	26,9	36,4
1896 - 1905	26,6	29,2
1906 - 1915	33	32,1

Da queste cifre notiamo una diminuzione della mortalità, particolarmente accentuata nel Sud Groenlandia. Si tratterà di un fatto duraturo? È difficile rispondere con certezza, ma da una parte mettendo in relazione questa diminuzione coll'aumento della natalità e con il sempre maggior incrociarsi della razza, si può essere ottimisti.

Quanto alle differenze di mortalità nei due sessi è da notarsi che nel periodo 1861-1900 in Groenlandia morirono per ogni 100 donne 128 uomini (nel Nord 125 e nel Sud 131) (1). Questa differenza in favore delle donne è molto più forte che nelle altre razze ed è dovuta in parte alla maggiore longevità femminile ed in parte alla grande mortalità tra gli uomini nell'età adulta, dovuta agli in-

(1) Confr. BERTELSEN, *Op. cit.*

cidenti di caccia. (Quest'ultima è infatti maggiore nel Sud Groenlandia che nel Nord).

Il BERTELSEN calcolò la percentuale di mortalità nei vari mesi dell'anno nel periodo 1851-1900 ed ottenne questi risultati:

Gennaio	7,4	Aprile	7,1	Luglio	10,1	Ottobre	9
Febbraio	7,4	Maggio	7,6	Agosto	9,5	Novembre	7,8
Marzo	7,2	Giugno	9,9	Settembre	9,2	Dicembre	6,8

La stagione fredda non influisce dunque affatto sulla mortalità che anzi, proprio in quei mesi, è minima. Nè l'assenza del sole durante la lunga notte polare ha alcun effetto immediato. Durante l'inverno però gli organismi sono debilitati dalla scarsa nutrizione e dall'inazione. Nel periodo in cui avviene lo sgelò, tutti i germi (1) che erano sotto il manto protettore della neve tornano alla luce e trovano una debole resistenza negli organismi. Sono infatti frequentissime in questa epoca le infezioni intestinali.

In secondo luogo, durante la buona stagione si ristabiliscono i rapporti con l'Europa e malgrado la sorveglianza sanitaria, che è assai rigorosa, si diffondono contagi. Il BERTELSEN osserva che in ogni singolo distretto è possibile dimostrare che la più alta percentuale di mortalità segue immediatamente il periodo dell'anno in cui vengono ristabiliti i rapporti con l'Europa.

La mortalità annua è più influenzata dal ritorno ritmico di queste epidemie (si tratta per lo più di affezioni delle vie respiratorie) che da ogni altra epidemia.

Il BERTELSEN stabilisce che nel periodo tra il 1861-1901 su 100 decessi più di trenta vennero causati da tubercolosi. Altrettanti avvennero nella classe d'età 0-5 anni e furono causati da catarrhi bronchiali ed intestinali. I rimanenti furono causati, metà da disgrazie varie e da incidenti di parto, e l'altra metà da epilessia, cancro, carbonchio, ecc.

Nel censimento della Groenlandia del 1921 vi è una statistica (tabella 9, pag. 33) sulle cause dei decessi nel periodo 1917-1921. In questo periodo la mortalità dovuta a tubercolosi rappresentò il 17,3 % della mortalità totale. Ma in questo stesso periodo si ebbe una fortissima mortalità dovuta all'epidemia influenzale (18,5 %). Cosicchè se è opinione corrente che la tubercolosi sia in diminuzione, è dif-

(1) Confr. BERTELSEN, *Op. cit.*

ficile però stabilire dei dati precisi. Questa ricerca sarebbe molto interessante giacchè uno dei benevoli effetti degli incroci è appunto quello di diminuire la grande suscettibilità a tutti i contagi in genere. Questa grande suscettibilità ritengo sia dovuta al fatto che gli agenti patogeni trovano nella razza pura un terreno vergine privo di difese per due motivi:

1) completa mancanza di resistenza immunitaria causata dal lungo isolamento;

2) mancanza di poteri umorali di difesa in correlazione con l'indebolimento ed il decadere della razza.

Questo stato di cose viene corretto dagli incroci che fortificano la razza e le conferiscono i poteri di resistenza immunitaria.

(Ad esempio, tra gli indiani del fiume Prinzapolka la tubercolosi mieteva numerosissime vittime; i meticci scampavano invece al flagello. La mortalità causata dalla tubercolosi è fra essi diminuita perfettamente in ragione dell'aumentare degli incroci). Si spiega così la maggiore mortalità constatata nelle colonie dei Padri Moravi in confronto delle colonie Danesi, in Groenlandia:

Tasso annuo di morte per 1000 ab.

		(1861 - 1891)	(1892 - 1900)
Distretto Julianehaab	Colonia danese	39	29
	Colonia dei P. Moravi	43	42
Distretto di Godthaab	Colonia danese	32	33
	Colonia dei P. Moravi	49	35

Ho accennato all'alta mortalità maschile dovuta agli incidenti di caccia. Tra il 1861 e del 1901 (Confr. BERTELSEN, *op. cit.*) per ogni 10.000 uomini, ne morirono in media annualmente per tale causa 52 nel Nord Groenlandia e 78 nel Sud. Nella classe d'età 20-25 anni morirono in seguito ad incidenti, nella Groenlandia del Nord e nella Groenlandia del Sud, rispettivamente il doppio ed il triplo di quanti nella stessa classe d'età morirono in Danimarca per tutte le cause insieme. La causa principale delle morti per disgrazie di caccia è data dall'annegamento per incidenti di kajac. Su 100 morti per disgrazie ne sono causate da annegamento 88 nel Sud Groenlandia e 77 nel Nord. La proporzione delle morti violente tra i due sessi è data da 21 (uomini): 1 (donne).

Dalle prime cifre abbiamo visto che la mortalità generale è mag-

giore nel Sud che nel Nord. Questa differenza è dovuta a varie cause : (confr. SAPPER, *op. cit.*).

1) Nella Groenlandia meridionale il clima è sfavorevole : poco freddo e poco ghiaccio. Le bufere che si abbattano sulla costa sono frequentissime. La selvaggina, causa le cattive condizioni del ghiaccio, può essere cacciata solo in kajac, donde la maggior frequenza di morti per annegamento.

2) La selvaggina è meno abbondante che nel Nord e per conseguenza la povertà è maggiore : l'allevamento dei bambini, il nutrimento in generale, le case e gli indumenti lasciano molto a desiderare.

3) Nella Groenlandia settentrionale l'inverno è più freddo e le condizioni di caccia e di pesca sono perciò migliori e permettono agli indigeni di cacciare sul ghiaccio, senza avventurarsi nei kajac.

Riguardo la costa Est tolgo dal SAPPER la seguente statistica sulla mortalità :

Anni	1901	morti per 1000 abitanti			7
»	1902	»	»	»	22
»	1903	»	»	»	25
»	1904	»	»	»	32
»	1905	»	»	»	16
»	1906	»	»	»	?
»	1907	»	»	»	35
»	1908	»	»	»	33
»	1909	»	»	»	19
»	1910	»	»	»	?
»	1911	»	»	»	21
»	1912	»	»	»	20
»	1913	»	»	»	22
»	1914	»	»	»	77
»	1915	»	»	»	38

Anni 1906-1915 morti per 1000 abitanti 28,2

In confronto al resto della Groenlandia la mortalità è piuttosto bassa. Ciò si deve al fatto che, per la poca accessibilità della costa, si sono avuti raramente contagi ed epidemie.

Nella tabella I (1), che tolgo dal BERTELSEN (*op. cit.*), sono calcolati in base al periodo 1861-1900 i quozienti di mortalità per le successive classi d'età quinquennali. Si nota subito la mortalità infantile del Sud Groenlandia, assai alta per le cause cui ho ora accennato.

Come appare dai dati il periodo di minore mortalità cade anche in Groenlandia tra i 10-15 anni, sia per i maschi che per le femmine. Come ho già detto, nell'età adulta la mortalità è assai alta specialmente tra gli uomini ed è particolarmente forte nel Sud (incidenti di caccia).

Nella tabella II (2) ho posto in confronto i dati del BERTELSEN sulla Groenlandia, con analoghi dati, relativi all'Italia ed alla Svezia (3). Risalta a prima vista la breve durata della vita in Groenlandia. La mortalità infantile (0-5 anni) in Groenlandia (70,6 p. mille) è quasi il doppio di quella in Svezia (39,1 p. mille) e se non il doppio però molto maggiore di quella in Italia (58,5).

Come si vede dai dati, la differenza si attenua nella classe d'età da 5-10 anni, ma dopo i 10 anni si va celermente accentuando sinchè nella classe 50-55 anni la mortalità in Groenlandia è più del quadruplo della mortalità in Svezia e più del triplo di quella in Italia. La mortalità poi che si verifica in Groenlandia nella classe 80-85 anni è di poco maggiore di quella che si nota in Svezia nel gruppo comprendente gli individui da 90 anni in su ed è di poco minore di quella che in questo gruppo si verifica in Italia.

Nessuna ragione, all'infuori di un criterio biologico, ci spiega la breve durata media della vita tra gli esquimesi. Siamo di fronte, anche in questo caso, ad una notevole caratteristica di decadenza e ad un primario fattore di estinzione delle razze.

Ci resta ora da esaminare la composizione per età della popolazione. Esaminando questa vedremo anche quale influenza modificatrice abbiano esercitato gli incroci di razza sulla durata media della vita.

(1) Vedi pag. 81.

(2) Vedi pag. 82.

(3) BENINI. *Principi di Demografia*, p. 38.

TABELLA I.

Quozienti di mortalità per 10.000.

Età	Nord Groenlandia 1861 - 1900		Sud Groenlandia 1861 - 1900	
	maschi	femmine	maschi	femmine
0 - 5	551	483	947	843
5 - 10	109	106	119	106
10 - 15	97	60	98	83
15 - 20	177	79	238	109
20 - 25	299	170	380	182
25 - 30	266	145	412	175
30 - 35	311	222	304	236
35 - 40	274	241	336	276
40 - 45	291	224	418	305
45 - 50	431	226	530	332
50 - 55	591	350	709	467
55 - 60	609	504	849	635
60 - 65	1167	737	1092	794
65 - 70	1385	750	1173	1129
70 - 75	2500	1192	2833	2541
75 - 80	4000	1937	?	4250
80 - 85	?	3500	?	?

TABELLA II. Quozienti di mortalità per 10.000.

Guppi d'età	Italia 1882 - 1891	Groenlandia 1861 - 1900	Svezia 1881 - 1890
0 - 5	585	706	391
5 - 10	108	110	77
10 - 15	50	84	40
15 - 20	58	150	45
20 - 25	83	258	59
25 - 30	83	250	64
30 - 35	85	268	67
35 - 40	91	282	75
40 - 45	109	312	88
45 - 50	120	379	102
50 - 55	167	529	128
55 - 60	211	649	173
60 - 65	376	947	249
65 - 70	516	1109	375
70 - 75	825	2266	587
75 - 80	1422	2547	930
80 - 85	1824	3500	1460
85 - 90	2879	?	2172
90 - 95	3934	?	3239
95 - 100		?	
più di 100		?	

§ 6. Vediamo ora quali mutamenti sono avvenuti col volger del tempo e coll'aumentare dei meticci, nella composizione per età della popolazione della Groenlandia.

Nella tabella III ho confrontato la composizione per età quale risultò in media nel periodo 1840-1860 con la composizione per età in media del periodo 1901-1921.

Se con le cifre su riportate si costruissero, sia per il Nord che per il Sud, due diagrammi di cui il primo riguardasse la composizione per età in media del periodo 1840-60 ed il secondo in media del 1901-21 tale diagramma mostrerebbe tanto nel Nord che nel Sud di aver ruotato da destra a sinistra cioè di essersi abbassato corrispondentemente alle prime classi d'età ed innalzato in corrispondenza alle successive. Tale movimento sembrerebbe a prima vista indicare (data la diminuita percentuale di individui nel gruppo 0-20 anni) una diminuita natalità.

Senonchè abbiamo già visto che la natalità tra il primo ed il secondo periodo è aumentata (vedi § 4). Appare dunque chiaro che l'innalzamento della curva corrispondente alle classi adulte non ha una causa riflessa, ma bensì è dovuto logicamente ad un aumento particolare del numero dei viventi in età adulta e cioè ad una diminuita mortalità.

Tale innalzamento della seconda parte della curva ha causato di riflesso l'abbassamento nella prima parte.

Nella Groenlandia del Sud invece il diagramma registrerebbe una rotazione meno ampia. L'aumento del peso delle classi adulte rispetto al totale è stato dunque qui di poco minore.

Vi è stato dunque in Groenlandia (più sensibilmente nel Nord che nel Sud) un miglioramento, dirò così, nella struttura demografica causato da una diminuita mortalità nelle classi più adulte.

Vediamo ora in quali classi d'età esso si è fatto più particolarmente sentire. Nella seguente tavola ho calcolato le variazioni che sono avvenute tra il peso di ciascuna classe d'età, rispetto al totale nel periodo 1840-60 ed il peso delle stesse classi rispetto al totale nel periodo 1901-1921.

	Nord Groenlandia	Sud Groenlandia		Nord Groenlandia	Sud Groenlandia
0 - 5	— 2,9	— 0,8	40 - 45	+ 1,0	+ 0,6
5 - 10	— 1,4	— 0,2	45 - 50	+ 1,0	+ 0,1
10 - 15	— 1,1	— 1,6	50 - 55	+ 0,8	+ 1,0
15 - 20	— 0,1	— 0,7	55 - 60	+ 0,4	+ 0,9
0 - 20	— 5,5	— 3,3	40 - 60	+ 3,2	+ 2,6
20 - 25	+ 0,2	— 0,4	60 - 65	+ 0,5	+ 0,9
25 - 30	+ 0,8	— 0,7	65 - 70	+ 0,1	+ 0,6
30 - 35	+ 0,3	—	70 - 75	—	+ 0,1
35 - 40	+ 0,6	— 0,1	75 - 80	—	—
20 - 40	+ 1,9	— 1,2	60 - 80	+ 0,6	+ 1,6
			80 - 85	—	+ 0,01

I numeri della tabella rappresentano, per così dire, le variazioni dell'importanza percentuale dell'ammontare delle singole classi d'età rispetto al totale, verificatesi nell'alterazione della composizione per età della popolazione, avvenuta tra i due periodi esaminati.

La diminuzione di mortalità si è soprattutto verificata nella classe d'età 40-60 anni in cui la variazione è stata pari a 3,2 nel Nord e a 2,6 nel Sud.

Attribuisco questo miglioramento biologico in primo luogo all'azione benefica degli incroci di cui ho già parlato ed in secondo luogo al miglioramento delle condizioni economiche e dell'igiene, dovuto all'opera svolta dall'Amministrazione Danese a favore degli Esquimesi.

La struttura demografica degli esquimesi occidentali va dunque migliorando.

Costruendo inoltre i grafici, si nota come, mentre nel periodo 1840-1860 la composizione per età della popolazione del Nord era molto diversa da quella del Sud, nel periodo invece 1901-1921 essa è quasi la stessa.

Poniamo ora a confronto il Sud, il Nord, l'Est e l'estremo Nord (Esquimesi Polari).

Classi d'età	Nord Groenlandia 1921			Sud Groenlandia 1921			Costa Est 1921			Esquimesi polari 1924		
	m	f	m+f	m	f	m+f	m	f	m+f	m	f	m+f
0-20	53,4	49,5	51,4	54,8	49,6	52,0	60,8	60,7	60,8	53,4	59,5	56,4
20-40	30,1	29,5	29,8	28,3	30,3	29,4	28,3	23,9	26,0	29,8	27,8	28,8
40-60	14,3	17,3	15,8	14,6	16,5	15,6	10,3	14,0	12,2	16,0	10,3	13,2
60 e più	2,2	3,7	3,0	2,3	3,6	3,0	0,6	1,4	1,0	0,8	2,4	1,6
	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Mentre i dati per il Nord, Sud ed Est Groenlandia sono ufficiali (cfr. Censimento 1921) i dati per gli Esquimesi polari non sono ufficiali: mi sono stati comunicati dal D. BERTELSEN e si riferiscono al 1924.

Osserviamo che nella costa Est l'aliquota della classe 0-20 anni è maggiore che nella costa Ovest; ma abbiamo visto anche che la natalità, o meglio la fecondità, non è maggiore nell'Est (1) che nell'Ovest; la causa di tale fatto perciò va ricercata non solo nella maggiore mortalità nelle classi più adulte, ma anche nel fatto che la popolazione che nel 1894 sommava a 235 ab. nel 1907, era raddoppiata in ragione di una forte prevalenza della natalità sulla mortalità: le classi adulte sono perciò, in questo periodo di passaggio dalla stazionarietà all'incremento, assai povere in confronto delle giovani.

Gli esquimesi polari sono invece stazionari come numero e la scarsa percentuale di individui nelle classi sopra i 40 anni è causata unicamente dall'azione della mortalità che rende breve la durata media della vita. La struttura demografica dei Polar Eskimo si differenzia notevolmente, come appare dalle cifre, da quella degli Esquimesi occidentali, per la sua poca sicurezza.

Il rapporto numerico tra i due sessi è rimasto quasi invariato attraverso il tempo, nel Nord Groenlandia, mentre invece si registra una lieve variazione a favore dei maschi nel Sud.

(1) Confr. pag. 73.

Uomini su 1000 abitanti

Anno	Nord Groenlandia	Sud Groenlandia
1834	483	455
1840	490	466
1860	498	457
1870	487	454
1880	477	454
1890	480	466
1901	472	459
1911	471	469
1921	487	471

Quest'ultima è dovuta probabilmente ad una diminuzione nella percentuale della mortalità maschile risultante da due cause: 1) una minore frequenza di incidenti di caccia; 2) una maggiore longevità maschile dovuta agli incroci.

Infatti nel 1901 la percentuale dei maschi nella classe 40-60 anni era di 45,9 per i meticci e di 38,2 per gli Esquimesi puri. Ora a quanto mi risulta, i meticci si dedicano come i puro sangue, in maggioranza alla caccia; non si può perciò attribuire la differenza di cui sopra al fatto che i meticci presentino una minore mortalità per disgrazie di kajak.

Bisogna perciò pensare ad un vero e proprio miglioramento biologico, dovuto agli incroci.

Ecco ora qualche dato sulla composizione in rapporto allo stato civile.

1000 individui per ogni sesso, ripartiti secondo lo stato civile

	Uomini					Donne				
	Groenlandia				Danimarca	Groenlandia				Danimarca
	1860	1901	1911	1921		1860	1901	1911	1921	
Celibato	262	209	228	239	280	263	227	236	229	278
Matrimonio	643	715	703	692	652	506	535	544	562	583
Vedovanza	95	76	69	69	61	231	238	220	209	130
Separazione	—	—	—	—	4	—	—	—	—	5
Divorzio	—	—	—	—	3	—	—	—	—	4

Come appare dai dati dal 1860 ad oggi la frequenza del celibato è diminuita assai ed è assai più piccola che in Danimarca. I coniugati maschi sono cresciuti di numero e sono più numerosi che in Danimarca (ciò si deve alla diminuita mortalità di cui sopra). Le femmine coniugate sono aumentate, ma in Danimarca la loro percentuale è assai più alta. Ciò è dovuto al gran numero di vedove che si registra in Groenlandia, per l'alta mortalità maschile.

Il loro numero è (parallelamente al maggior numero dei coniugati maschi) diminuito.

Le variazioni perciò che sono avvenute nella composizione per stato civile della popolazione si mostrano favorevoli ad un aumento del potere riproduttivo.

TABELLA III.
Popolazione indigena della Groenlandia del Nord e della Groenlandia del Sud:
100 individui ripartiti in gruppi d'età quinquennali nei vari censimenti

Età	1840		1845		1855		1860		1901		1911		1921		1840-1860 (media)		1901-1921 (media)	
	N	S	N	S	N	S	N	S	N	S	N	S	N	S	N	S	N	S
0-5	18,8	16,2	16,6	16,8	17,1	13,7	17,4	14,1	15,6	13,7	15,2	13,7	12,9	15,9	17,5	15,2	14,6	14,4
5-10	15,7	13,8	15,3	12,9	14,8	14,9	14,0	12,7	13,2	13,1	13,7	13,5	13,6	13,7	14,9	13,6	13,5	13,4
10-15	13,1	13,6	13,3	11,9	12,9	13,1	13,2	14,0	10,2	11,4	12,6	11,7	13,3	11,3	13,1	13,1	12,0	11,5
15-20	11,3	11,4	11,4	11,5	10,4	10,6	10,5	12,4	10,3	10,2	10,5	11,1	11,5	11,1	10,9	11,5	10,8	10,8
20-25	7,4	9,8	9,4	9,9	9,5	9,2	9,3	9,3	9,0	9,8	7,9	8,8	10,3	8,7	8,9	9,5	9,1	9,1
25-30	6,1	8,8	7,6	8,9	8,3	9,0	7,9	8,2	9,3	7,9	7,5	7,7	8,2	8,3	7,5	8,7	8,3	8,0
30-35	6,7	6,1	5,0	6,9	6,8	7,0	7,2	7,8	7,3	6,9	7,0	7,3	5,9	6,6	6,4	6,9	6,7	6,9
35-40	5,8	5,7	5,5	5,7	4,9	6,5	5,9	6,0	6,2	5,6	6,8	6,3	5,3	5,8	5,5	6,0	6,1	5,9
40-45	4,3	4,1	4,7	4,1	3,7	5,3	4,3	5,2	5,1	5,3	5,2	5,1	5,3	5,4	4,2	4,7	5,2	5,3
45-50	3,1	3,9	3,6	4,0	4,0	3,9	3,2	4,3	4,4	4,6	4,5	4,1	4,7	4,4	3,5	4,3	4,5	4,4
50-55	2,8	3,1	2,5	3,0	3,1	2,6	2,5	2,5	3,8	4,6	3,5	3,5	3,2	3,4	2,7	2,8	3,5	3,8
55-60	1,8	1,8	2,0	2,1	2,1	2,0	2,1	1,6	2,3	3,2	2,4	2,8	2,6	2,4	2,0	1,9	2,4	2,8
60-65	1,4	0,8	1,0	1,0	1,2	1,2	1,3	1,0	1,6	1,9	1,7	2,5	1,8	1,4	1,2	1,0	1,7	1,9
65-70	0,9	0,5	0,9	0,7	0,8	0,5	0,6	0,5	1,0	1,2	0,9	1,2	0,7	0,9	0,8	0,5	0,9	1,1
70-75	0,5	0,2	0,4	0,2	0,3	0,2	0,4	0,1	0,6	0,2	0,03	0,4	0,3	0,4	0,4	0,2	0,4	0,3
75-80	0,2	0,04	0,1	0,2	0,08	0,08	0,2	0,3	0,1	0,06	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,09	0,1	0,09
80-85	—	0,02	0,06	0,07	0,02	—	0,03	—	—	0,06	—	0,03	0,01	—	0,03	0,02	0,006	0,03
85-90	—	—	—	—	—	—	0,03	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

N — Nord Greenlandia.
S — Sud Greenlandia.

§ 7. È opinione corrente che la razza esquimese, al pari delle altre razze decadenti, vada scomparendo.

Dal materiale e dalle cifre che ho riportato in questo studio appare peraltro come in Groenlandia la popolazione non sia diminuita ma anzi si sia accresciuta di anno in anno al punto da essere raddoppiata in circa un secolo. L'eccezione subita dalla popolazione della Groenlandia, deve essere attribuita a queste due cause concomitanti:

A) Il sistema di colonizzazione Danese.

B) La commistione di razze.

La seconda causa ha risolto la crisi demografica; ma tale effetto non sarebbe stato raggiunto se non attraverso il sistema speciale di colonizzazione che ora verremo esaminando.

A) Il metodo di colonizzazione Danese.

Il governo Dano-Norvegese (1), fin dal momento in cui assunse (per i motivi economici già visti) il monopolio della Groenlandia, emise un'ordinanza (1774) in cui veniva proibito a tutti, sia stranieri, sia sudditi dei due regni, di navigare nelle acque della Groenlandia. Queste norme che vennero in seguito accettate da ogni Stato, sono tuttora in vigore.

Dapprima quando HANS EGEDE dirigeva la colonia, lo scopo della colonia era l'opera missionaria ed il mezzo per raggiungere tale scopo era il commercio. In seguito quando venne assunto il monopolio ed il commercio acquistò una importanza decisiva, i funzionari del monopolio vennero incaricati di tutelare gli interessi della popolazione indigena. A tutti gli Europei che risiedevano in Groenlandia venne inviata un'istruzione generale avente per scopo di proteggere gli indigeni contro ogni ingiustizia e di mantenere l'ordine nel paese. Nel suo stile si sente l'epoca in cui essa venne redatta: l'epoca riformatrice degli ultimi decenni del 700. Eccone un paragrafo (2): « Tutti gli europei del paese devono trattare gli indigeni con dolcezza e con amore, aiutarli nei limiti del possibile, dar loro buon esempio e vegliare affinché non sian fatte loro nè ingiustizie nè torti di alcun genere ».

(1) A. BERTELSEN, *La Colonie Danoise du Groenland. Essai sur la géographie médicale et la nosographie médicale*. « La Presse médicale », n. 83, 17 ottobre 1923.

(2) Cfr. BERTELSEN, *Ubi Supra*.

Fu evitata ogni ingerenza nella vita sociale degli Esquimesi e questi continuarono a vivere secondo i loro costumi tradizionali.

Senonchè col volger degli anni, si osservò tra gli indigeni una crescente indifferenza verso i loro antichi usi e le loro tradizioni. Tale mutamento portò tra i varii spiacevoli risultati, ad una diminuzione dello spirito di previdenza della popolazione, ed in conseguenza aumentarono la miseria ed il disagio.

Per rimediare a ciò, su proposta dell'ispettore H. RINK, valente etnografo e geografo, venne fatto un primo esperimento di autonomia comunale in Groenlandia. In ogni distretto commerciale venne costituita una « *Forstanderskab* » (Direzione) formata da rappresentanti indigeni eletti dai loro compagni, in accordo, con i funzionari danesi; la *Forstanderskab* s'occupava degli interessi interni del distretto e della popolazione, dei litigi tra Groenlandesi ecc.. La cassa commerciale della Groenlandia metteva a disposizione dei *Forstanderskab* una somma pari ad un quinto delle entrate per i prodotti smerciati nell'anno. Vengono così distribuiti dei sussidi ai poveri, ai lavoratori momentaneamente in bisogno, alle vedove, agli orfani; godono anche di sussidi gli abitanti del distretto in proporzione al numero dei componenti la famiglia, ed in ragione della loro capacità produttiva.

Tra i mezzi di coercizione, il più efficace è appunto l'esclusione dalla « Ripartizione » nome dato a questa distribuzione di sussidi. Altre punizioni sono: la proibizione di commerciare sui luoghi di mercato, e la pubblicazione del nome del colpevole e del suo delitto. Polizia, prigionieri, soldati, ecc... furono sempre ignorati in Groenlandia.

In questi ultimi anni, per iniziativa del Direttore M. DAUGAARD JENSEN, fu allargata la partecipazione degli indigeni all'amministrazione comunale, e contemporaneamente venne ristretta quella degli europei. Inoltre in ognuno dei due ispettorati (Nord e Sud) è stato istituito un Consiglio di rappresentanti, in maggioranza indigeni, che si occupa degli affari interni del paese, fissa norme giuridiche e collabora all'amministrazione della cassa comune, distribuendo ricompense ai lavoratori più meritevoli, organizzando lotte contro epidemie e malattie, ecc..

Gli Europei della Groenlandia, pur vivendo sotto il regime della legge danese, devono osservare le norme che hanno forza di legge in Groenlandia.

Lungo la costa occidentale vi sono 12 stazioni commerciali nei

maggiori centri abitati. Tra l'una e l'altra stazione vi sono dei *Udsteder* (succursali) che servono a favorire gli scambi commerciali. Nel commercio il governo danese tiene prima di tutto conto degli interessi della popolazione: ciò è solo possibile in virtù del monopolio. Così il prezzo a cui il governo compra una determinata merce non è determinato solo dal suo valore sul mercato mondiale, ma anche dall'interesse che il governo ha ad incoraggiare una data produzione in vista degli interessi indigeni. Così, ad esempio, i prodotti della pesca delle foche, che sono i più necessari all'esistenza della popolazione e nel contempo i più pericolosi e penosi a procurarsi, sono pagati ad un prezzo molto superiore che i prodotti della facile e non pericolosa caccia delle volpi, i cui prodotti sono d'importanza mediocre per la vita della popolazione. In questi ultimi anni è stato introdotto l'allevamento del montone che è stato incoraggiato pagandone i prodotti a dei prezzi piuttosto elevati. La forma amministrativa del commercio impedisce poi alla popolazione di barattare imprudentemente dei prodotti necessari con merci che possano esercitare sui singoli un'azione dannosa.

Il controllo sanitario è severissimo. Tutti i passeggeri e marinai delle navi che sono adibite al traffico od al trasporto di passeggeri, tra colonia e madre patria, sono sottomesse alla loro partenza dalla Danimarca ad un controllo medico obbligatorio anche per gli stessi funzionari del Monopolio.

Non fu mai permessa l'importazione del tabacco e di alcoolici. Tali disposizioni vennero riaffermate in un decreto del 1884 che va sotto il titolo *Notice to Mariners in the Davis Straits*. Di conseguenza nessun alcoolico venne mai venduto agli indigeni: solo raramente vennero regalate dal governo stesso alla popolazione piccole quantità di vino.

Attraverso il severo controllo sanitario si riuscì ad impedire il dilagare delle malattie sessuali verificatosi invece in altre popolazioni selvagge. In duecento anni di colonizzazione se ne ebbero rari casi. Fa eccezione la piccola colonia di Ivigtut, ma questa popolazione fu rigorosamente separata dalle altre e non può contrarre matrimoni fuori del suo ambiente.

In Groenlandia vi sono 7 distretti medici in ognuno dei quali vive un medico danese. I medici sono tenuti almeno una volta all'anno a visitare (viaggiando in slitta o in motoscafo a seconda della stagione) tutti i luoghi abitati, visitando tutti gli infermi, procedendo

ad una vaccinazione generale e distribuendo medicine e discutendo con gli abitanti le questioni d'ordine igienico.

A parte poi questo viaggio annuo, il medico è tenuto a recarsi anche nelle più lontane località nei casi gravi. Molte giovani groenlandesi, le più atte a divenire infermiere, o levatrici, seguono dei corsi di lezioni tenute dal medico nel centro di ogni distretto; dopo due anni di studi vengono destinate nelle varie località del distretto; le più brave vengono inviate per due anni in Danimarca per perfezionarsi. Dove manca il medico esse lo suppliscono; nel 1923 se ne contava una ogni 150 abitanti. La più alta autorità medica, dove manca il medico, è però il funzionario di commercio, che in ogni stazione ha a disposizione gratuita della popolazione una riserva di medicinali vari. Nei distretti vi sono dei piccoli ospedali forniti da 5 a 20 letti, spesso diretti da infermiere danesi. La vaccinazione obbligatoria ha impedito il ripetersi delle gravi epidemie di vaiuolo che in passato si verificarono.

L'abbondante fornitura di derrate alimentari ed il sistema già esposto della « Ripartizione » hanno di molto mitigato i danni delle carestie.

Per quanto riguarda le abitazioni, alle antiche capanne estive ed agli igloo invernali si vanno quà e là sostituendo comode casette di legno divise in più vani. Il Dott. BERTELSEN (*op. cit.*) dice che la linea direttiva della politica coloniale danese è stata quella di proteggere il popolo della Groenlandia e di prepararlo a raggiungere al più presto possibile un grado tale di autonomia economica e morale che, evitandogli di soccombere nella concorrenza, gli permetta di entrare in rapporto col resto del mondo. Pur tralasciando ogni ideologia bisogna però concludere che l'opera svolta in Groenlandia dalla Danimarca è degna di ammirazione e dovrebbe essere presa ad esempio dall'Inghilterra e dagli Stati Uniti che invece si preoccupano ben poco delle tribù esquimesi viventi nei loro possedimenti.

B) *La commistione di razza.*

Solo attraverso questa continua opera svolta per evitare i contagi, per attenuare i danni delle carestie, per migliorare sotto tutti i punti di vista le condizioni di vita del popolo, è stato possibile ottenere i buoni risultati dalla commistione di razza. I vantaggi di tale commistione, senza il controllo sanitario di cui ho parlato, sarebbero stati avversati ed annullati dal diffondersi di epidemie, contagi,

vizii, ecc... come è avvenuto in altre popolazioni barbare. Gli incroci generano dunque un potente miglioramento biologico che si traduce in un miglioramento fisiologico generale; gli organismi, mentre erano in via di deperimento, si fortificano e possono maggiormente resistere alle malattie importate, sia per la loro migliorata costituzione, sia per una maggiore resistenza immunitaria acquisita attraverso l'incrocio con razze che ne erano già fornite. Si attenua così la mortalità generale e particolarmente poi quella nelle classi adulte per una aumentata durata media della vita. Quanto alla riproduttività essa attraverso gli incroci recupera il vigore che aveva perso; si innalza, come s'è visto, la fecondità.

Questo miglioramento biologico ritengo che si prolunghi per molte generazioni anche se non avvengono ulteriori incroci.

La commistione di razza è resa sempre più veloce da due cause. La prima consiste nel fatto che delle cinque seguenti categorie di matrimoni, che si riscontrano in Groenlandia:

- 1^a esquimesi ed esquimesi;
- 2^a esquimesi e meticci;
- 3^a esquimesi e bianchi;
- 4^a meticci e meticci;
- 5^a meticci e bianchi.

la prima che comprende i matrimoni tra esquimesi puri, si va sempre più restringendo specialmente per l'aumentare della 2^a (esquimesi e meticci) e della 4^a (meticci e meticci).

La seconda causa è inerente alla riproduttività differenziale e più particolarmente alla fertilità differenziale. Il Prof. GINI (1) intende per riproduttività differenziale il fatto che i differenti gruppi della popolazione vivente contribuiscono in varia misura alla procreazione della generazione futura. Le differenze nella riproduttività possono dipendere da differenze nella mortalità, nella nuzialità e nella fertilità della popolazione.

Tra gli esquimesi della Groenlandia ed i meticci non si notano variazioni del fattore nuzialità.

Sono invece sensibili le differenze di mortalità e particolarmente forti come s'è visto le differenze nella prolificità. Il Prof. GINI osserva che esaminando le statistiche dei vari Stati si riscontra che

(1) Prof. CORRADO GINI, *Alcune ricerche italiane sulla riproduttività differenziale*. «Economia», Anno V, n. 8-9, vol. XII, agosto-settembre 1927.

una generazione non deriva da tutta la generazione precedente ma da una frazione di essa che va da un massimo di $1/2$ ad un minimo di $2/9$. Ora data la maggiore prolificità degli esquimesi incrociati e la loro minore mortalità in confronto dei sangue puri è logico che i primi avranno una parte enormemente più importante dei secondi nella produzione della generazione successiva in cui perciò, a prescindere dall'aumento numerico degli incroci per nuovi matrimoni, la percentuale dei sangue misti sarà di molto aumentata in confronto alla generazione precedente.

Nel mentre che la razza si va incrociando, si vanno così attenuando, sino a sparire, le caratteristiche di decadenza che notammo nei gruppi di razza pura come i Polar-Eskimos.

La razza esquimese in Groenlandia dunque sparisce e le cure e le speranze della Danimarca si rivolgono ora a questa nuova popolazione di meticci.

La legge di decadenza delle razze non può essere in alcun modo contrastata: se ne possono tutt'al più mitigare gli effetti o rallentando il moto verso l'estinzione, ovvero (attraverso gli incroci e realizzando un ambiente che mi sembra possa essere paragonato nella floricultura ad una serra) facendo sì che l'estinzione numerica si tramuti in una estinzione raziale, dando così luogo al sorgere di una nuova popolazione meticcia.

II.

Labrador.

§ 1. *L'opera del governo di Terranuova e l'opera dei Padri Moravi nei riguardi della popolazione esquimese del Labrador.* — § 2. *Dati statistici sulla popolazione esquimese.* — § 3. *Fattori di decadenza.*

§ 1. Al contrario di quanto è avvenuto ed avviene in Groenlandia dove la Danimarca, mediante l'applicazione della severa politica protettrice di cui già ho parlato, ha notevolmente contribuito al benessere ed all'incremento della popolazione, il Governo di San Giovanni di Terranova si è scarsamente occupato del problema demografico e della protezione degli esquimesi del Labrador. Questi, in balia delle molte malattie importate, danneggiati economicamente dalla concorrenza dei cacciatori bianchi che, tollerati dal Governo di San Giovanni, andavano distruggendo la cacciagione, esposti alle

prepotenze violente dei bianchi, hanno trovato una valida protezione nei Missionari Moravi che tuttora proseguono con meraviglioso spirito di abnegazione l'opera di protezione e di conversione che iniziarono nel 1771.

In tempi remoti gli esquimesi del Labrador abitavano (1) anche la parte australe ed orientale della penisola sino alla Eskimo-Bay nel golfo di San Lorenzo, e tutto il territorio prossimo alla baia di Hudson.

I Crees sospinti dall'avanzata degli Iroquois a loro volta spostarono gli esquimesi che, abbandonati quei territori, si ridussero nel loro attuale habitat che è compreso tra il Capo Chidley e l'Hamilton Inlet. I Padri Moravi fondarono in questa zona costiera varie stazioni. La più settentrionale è quella di Killinek o di Capo Chidley.

Gli esquimesi dapprima vivevano in questa località ricchissima di trichechi, foche e balene, completamente tagliati fuori dal mondo e senza alcun aiuto in caso di malattia e di incidenti. Pertanto i Missionari vollero fondarvi una stazione. Scendendo verso il Sud si incontrano le due stazioni, abbandonate in seguito per mancanza di risorse, di Ramah e di Nachvak. Poi la stazione di Hebron ed ancora più al sud Okkak, che entra già nella zona alberata. Infine Nain, porto importante per il commercio, sede del Vescovato e principale stazione dei Padri Moravi ed ultima Hopedale. In questa stazione il GRENFELL (medico e missionario) (2) notava una popolazione mista di meticci e di esquimesi puri in cui l'elemento incrociato andava rapidamente prendendo terreno a danno dell'elemento puro. Oggi appunto su questo elemento meticcio il governo di Terranova ripone le sue sonnecchiose speranze. Oltre i fratelli Moravi lavorano nel Labrador la Chiesa Metodista che ha il suo quartier generale a Rigolet e la Chiesa anglicana che ha la sua base a Battle Harbour. Vi è poi la « Missione di alto mare per il Labrador ». Essa possedeva nel 1908 alcune navi ospedale, alcune navi asili e quattro ospedali sulla costa (3).

Una chiara prova del benefico effetto delle missioni Morave

(1) Confr. W. T. GRENFELL, *Labrador - The country and the people*, p. 185.

(2) GRENFELL, *Op. cit.*

(3) Il disinteresse del Governo di Terranova e le cure dei Padri Moravi hanno portato ad un curioso stato di fatto che già nel 1910 constatava il GRENFELL: che la gente più evoluta nel Labrador sono gli Esquimesi: quasi tutti leggono e scrivono e sono abbastanza bravi nel calcolo, parecchi di essi si distinguono nel commercio. Sanno far musica, cantare e sono anche bravi oratori. I bianchi invece sono sempre assai ignoranti e quasi tutti analfabeti!

tra gli esquimesi del Labrador ci è data dal fatto che alcune centinaia di esquimesi del Sud che vivevano nel Golfo di San Lorenzo e lungo la parte meridionale della costa del Labrador, e la cui esistenza ci è confermata, più di 100 anni fa, dai diari di CARTWRIGHT e da rapporti della prima stazione Morava di Nain, sfuggirono, data la lontananza della zona che abitavano, alla protezione dei P. Moravi e andarono rapidamente scomparendo; ne esiste oggi ancora un esiguo gruppo presso Rigolet.

Nelle Missioni invece, gli indigeni sono diminuiti in assai minor misura.

§ 2. Il SAPPER. (*Petermanns Geogr. Mitteil.*, vol. 64, p. 210) pubblica una statistica sugli Esquimesi del Labrador fornitagli da LEONH. REICHEL, direttore della Missione dei Padri Moravi.

Questi dati, gli unici, pur troppo, esistenti, si riferiscono solo a quella parte della popolazione esquimese (circa la metà della totale) che è sottoposta alla Missione di Herrenhute. Per quanto riguarda l'intera popolazione del Labrador ci vien comunicato in data 22 settembre 1927, dal *Colonial Secretary* di San Giovanni di Terranova che l'intera popolazione del Labrador vivente permanentemente sulla costa è di circa 4000 individui di cui circa la metà si crede siano Esquimesi e che il numero degli indigeni è assai minore di prima causa una epidemia d'influenza che sette od otto anni fa colpì la costa distruggendo delle intere colonie esquimesi. Riporto in mancanza di statistiche più estese i dati del REICHEL sugli esquimesi delle missioni.

Anni	Totale abitanti	Esquimesi	Coloni
1899	1266	—	—
1900	1262	982	280
1901	1283	999	284
1902	1273	982	291
1903	1296	999	297
1904	1298	997	301
1905	1321	1015	306
1906	1309	1004	305
1907	1304	994	310
1908	1253	—	—
1909	1270	—	—
1910	1229	—	—
1911	1250	—	—
1912	1272	—	—

Natalità e mortalità degli Esquimesi (1901-1907)

anni	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907
nati p. 100 ab.	4,4	4,5	6,0	4,3	5,8	4,3	4,2
morti p. 100 ab.	4,6	6,2	5,8	9,6	7,8	6,5	6,6
diffe- renza	— 0,2	— 1,7	0,2	— 5,3	— 2	— 2,2	— 2,4

Dai primi dati la popolazione esquimese sembrerebbe stazionaria. Ma i dati sulla natalità e mortalità mostrano invece che tra il 1901 ed il 1907 si ebbe una natalità media annua del 4,9 % ed una mortalità del 6,7 %. In conclusione vi fu uno sbilancio medio annuo tra natalità e mortalità pari al 1,8 %. Nei primi dati la popolazione risulta stazionaria solo perchè i vuoti che si producono tra gli esquimesi sottoposti alle missioni sono compensati da nuovi adepti.

Il Prof. SAPPER dice inoltre che da antiche statistiche esistenti negli archivi della missione risulta che la popolazione esquimese era in via di diminuzione anche prima che avvenissero normali contatti con i bianchi.

Il missionario Sig. STETTASCH, della missione di Nain, cui avevo chiesto una copia di queste statistiche mi ha risposto che esse furono perse in un incendio che si sviluppò sei anni fa negli archivi; ma mi ha confermato la notizia. Non bisogna stupirsi di questa diminuzione precedente all'incontro con la civiltà giacchè essa è anzi il segno più evidente della decadenza demografica in cui si trovava la popolazione.

Non ho potuto ottenere dati sulla composizione per età della popolazione. Però, come dimostrai per la Goenlandia, dato che le alterazioni di tale composizione, derivanti da una alta mortalità nelle classi oltre i 50 anni, si ripercuotono sulla natalità esaltandone il valore, si può allora spiegarsi gli alti valori che la mortalità e natalità raggiungono nel Labrador, pensando ad una durata della vita assai breve causata da una alta mortalità nelle classi più adulte e che contribuiscono meno o affatto alla riproduzione.

La popolazione esquimese del Labrador si va dunque lentamente estinguendo per un lieve sbilancio tra natalità e mortalità, sbilancio però che in certi periodi di epidemie diviene altissimo.

Il Sig. STETTASCH mi dice che se non vi fosse stata l'epidemia di influenza del 1918 la popolazione esquimese sarebbe oggi numericamente pari all'80% di quella che viveva 100 anni fa. L'epidemia del 1918 diminuì del 50% la popolazione esquimese.

§ 3. Il SAPPER nel suo già citato articolo dice che un Dottore residente a Oak stabilì come cause della diminuzione della popolazione le seguenti: l'influenza della civiltà europea, la vita in comune nelle colonie; i matrimoni tra consanguinei ed il costante aumento delle malattie veneree. Ora ritengo che bisogna distinguere l'indebitamento della razza e la sua diminuita riproduttività (fenomeni di origine biologica interna) da tutti i fattori esterni che hanno potuto, stante il deperimento fisiologico della razza, esaltare la mortalità. Come ho già detto, si riscontra una diminuzione nella popolazione esquimese, preesistente all'incontro con la civiltà. Eccoci dunque dinanzi ad un agente interno, ad una tendenza all'estinzione, le cui cause vanno ricercate nella biologia.

Quanto ai matrimoni tra parenti, abitudine che fu saggiamente combattuta dai Padri Moravi, essi producono certamente un'azione deleteria sulla razza, ma mi sembra che questa azione sia ben poco, in confronto ad un altro fatto: all'isolamento lunghissimo in cui rimasero queste tribù del Labrador, isolamento per cui non si ebbero mai possibilità d'incroci, ed i matrimoni per vari secoli si svolsero sempre entro la medesima cerchia, cioè tra generazioni sempre più consanguinee. E mentre in Groenlandia il flusso di sangue bianco migliorò fin da tempi lontani la razza, la popolazione esquimese del Labrador fu condannata ad isterilirsi. È questo, credo, uno dei gravi fenomeni che vengono a complicare e ad interferirsi con la legge di decadenza delle razze rendendone ancor più veloci gli sviluppi.

Passiamo ora a considerare gli altri fattori: 1) le malattie. Quanto alle malattie, il GRENFELL (1) vari anni fa scriveva: « La salute nel Labrador è stata una questione di fortuna » giacchè, malgrado i deficienti provvedimenti sanitari, malgrado la mancanza di fognature, di uffici sanitari, di vaccinazioni, non si producevano nel Labrador le tremende conseguenze che si notavano in altre terre del Nord America.

Il peggior nemico degli esquimesi del Labrador è la tubercolosi.

(1) *Op. cit.*, p. 175.

La sifilide è al secondo posto ma viene attivamente combattuta: gli esquimesi hanno orrore di questa malattia (I) ed intendono liberarsene. Si ebbero raramente pochi casi di vaiuolo e di scarlattina, importati il primo da un veliero proveniente dal Golfo di San Lorenzo e la seconda da un veliero proveniente da Terranova. All'arrivo dei visitatori estivi si hanno talvolta piccoli focolai di difterite. Le epidemie più grandi furono tre: quella di tifo che uccise parecchie centinaia di individui e che fu importata da alcuni esquimesi di ritorno dalla esposizione di Chicago; quella di difterite che provenne analogamente dall'esposizione di Buffalo, ed ultima l'epidemia d'influenza del 1919 e 1920 di cui ho già parlato e che fu certamente una ripercussione della nostra « spagnola ». Essa fu particolarmente grave.

Passiamo ora ad esaminare un altro secondo fattore: 2) La diminuzione delle sussistenze indigene.

Lo sviluppo sempre maggiore che prendono le pescherie di Terranuova danneggia sensibilmente gli esquimesi di cui già gran parte ha abbandonato la caccia dandosi ad altri mestieri ed accentrandosi nelle colonie dove vivono i bianchi. Il GRENFELL fornisce alcuni dati riguardo la diminuzione delle balene:

Nel 1904 due compagnie uccisero 153 balene

» 1905 tre	»	»	149	»
» 1906 due	»	»	85	»
» 1907 due	»	»	94	»

Il danno è cominciato dai primi anni del 900 a farsi sentire più sensibilmente anche riguardo alle foche e specialmente alla più comune e più pregiata: la « foca groenlandica ».

Il GRENFELL osserva che mentre nel 1795 a Battle Harbour si riteneva cattiva un'annata in cui si pescarono 1100 foche ora (1910) 150 sarebbero molte. Nel 1910 non si pescarono inoltre più di 50 trichechi su tutta la costa!

Fortunatamente è scampata alla strage la foca « netsek » che vive nel Nord, nei buchi che scava nei banchi di ghiaccio. Dobbiamo ora pensare che la balena, la foca ed il tricheco forniscono agli esquimesi il vitto, vestiario, luce, alloggio, battelli, armi e persino le reti da pesca, che vengono da loro tessute con strisce di intestini di foche. Il decrescere delle sussistenze indigene ebbe ed ha per conseguenza l'abbandono della vita nomade e dei mestieri indigeni e l'accentrarsi de-

(I) *Op. cit.*, p. 176.

gli esquimesi nelle colonie abitate dai bianchi. Peggiorano così le condizioni igieniche, aumentano i contagi e si diffondono le malattie veneree e la tubercolosi. Senza l'aiuto dei Padri Moravi forse oggi-giorno nel Labrador non esisterebbero più esquimesi. Essi, come è avvenuto ad es. per i Beothuks di Terranova, sarebbero scomparsi sotto la duplice spinta della stessa legge di decadenza della loro razza, e dei vari danni derivati dal contatto con i bianchi.

L'opera svolta dai P. Moravi è riuscita a rallentare il movimento verso l'estinzione; vi ha contribuito, senza dubbio notevolmente, la commistione di sangue; ma l'ambiente non era, nè è, abbastanza curato perchè si potesse verificare il fenomeno avvenuto in Groenlandia. In altre parole nel Labrador si svolge un'estinzione anche numerica.

III.

L'Alaska.

Il Generale A. W. GREELY (1), autore d'un interessante studio sull'Alaska, nota che, contrariamente a quanto si crede, gli esquimesi dell'Alaska non vivono in maggior parte sulle coste dell'Oceano artico. Meno di 1/5 di essi abita le terre comprese nel circolo artico; il restante e cioè la maggioranza, popola la zona costiera prospiciente il mare di Behring.

Ho potuto raccogliere solo poche notizie su questi esquimesi.

L'Alaska fu sotto l'influenza russa tra il 1741 (Viaggio di Behring) ed il 1867, anno in cui fu venduta dalla Russia all'America. Il primo stabilimento commerciale russo venne impiantato nel 1784 a Three Saints nell'isola di Kodiak. Nel 1799 venne fondata una compagnia commerciale Russo-americana che organizzò regolarmente il traffico.

I Russi (2) cercarono di non portare cambiamenti nella vita degli indigeni; non avvennero quindi persecuzioni nè stragi di esquimesi. Non fu così però per gli Aleutini. Questi indigeni che abitano l'arcipelago omonimo prospiciente l'Alaska, appartengono anche essi

(1) Gen. A. W. GREELY, *Handbook of Alaska*, 1909.

(2) Confr. *Handbook of American Indians*. (Voce: *Russian influence*), Ed. Smith. Inst.

alla famiglia esquimese, ma si differenziano per i loro usi ed anche per lievi differenze somatiche dagli esquimesi della costa dell'Alaska. Gli aleutini opposero resistenza ai Russi; i bianchi naturalmente ebbero il sopravvento. Di questa lotta vedremo più innanzi le tristi conseguenze. La popolazione esquimese dell'Alaska risentì però dei gravi danni dal contatto con i bianchi, per i numerosi contagi. I commercianti portarono nella regione le malattie infettive, fino allora sconosciute tra gli indigeni; esse furono in ordine di gravità: scarlattina, rosolia, vaiuolo. Inoltre dopo la spedizione telegrafica americana del 1866 si diffuse la sifilide. La prima notizia sul numero degli esquimesi viventi nell'Alaska ci è data dal censimento americano nel 1880. Gli esquimesi censiti in quell'anno furono 17.617. Nel censimento del 1890 vediamo il loro numero sceso a 14.012.

Il censimento del 1900 non distingue gli indiani dagli esquimesi. Nel 1910 gli esquimesi censiti furono 12.652 e nel 1920, 13.698. Essi sono dunque fortemente diminuiti; solo nel decennio 1910-20 si nota un lieve miglioramento.

In base al censimento del 1910 (l'unico che offra una relativa abbondanza di dati) ho calcolato qualche cifra. Dei 12652 individui censiti 6559 erano maschi e 6093 femmine. Su 1000 individui si avevano cioè 518 maschi. In Groenlandia invece il per mille dei maschi oscilla intorno a 470. La differenza in favore del sesso maschile che si riscontra negli esquimesi dell'Alaska si può forse attribuire ad una minore mortalità maschile per incidenti di caccia, in relazione al migliore stato del ghiaccio nei mesi invernali. Dal totale di 12.652 individui se togliamo 246 individui di età sconosciuta resta un totale di 12.406 individui che si ripartiscono in classi d'età nella seguente proporzione:

	indigeni censiti	percentuale
sotto 20 anni	5887	47,4
tra 20 - 50	5531	44,6
51 e più	988	7,9
Totale	12.406	100

Il censimento americano distingue 39 tribù specificate. Parecchie di queste erano nel 1910 sull'orlo dell'estinzione.

Ben otto di esse erano ridotte a meno di 10 individui ciascuna;

esse erano le seguenti : Imaklimiut, Iprakmiut, Kaugmaligmiut, Kopagmiut, Kukpaurungmiut, Naparktoo, Pitukmiut, Sidarumiut. Complessivamente comprendevano 40 individui. Le seguenti sei tribù : Kakuakamiut, Kekchabukmiut, Kuskowic, Neechuctamiut, Nuschagagmiut, Polazzamiut erano composte ciascuna da meno di 50 individui. Complessivamente comprendevano 162 esquimesi di cui nove meticci.

Queste quattordici tribù, a parte nove individui di età sconosciuta, comprendevano dunque 193 individui, la cui ripartizione in classi d'età era la seguente :

A n n i	indigeni censiti	%
tra 0 - 20	80	41,4
20 - 50	91	47,1
51 e più	22	11,4
Totale	193	100

Seguono i dati sulle 25 restanti tribù :

Restano (1) ancora 487 esquimesi di cui 393 di età conosciuta. La loro ripartizione per età era la seguente:

	indigeni censiti	percentuale
0 - 20	232	59,0
20 - 50	135	34,3
51 e più	26	6,6
	393	100

Di questi 393 indigeni 334 erano puri e 59 meticci. La percentuale di meticci era cioè del 15%.

Dall'esame di tutti questi dati risultano varii fatti.

Considerando la popolazione complessiva dell'Alaska vediamo che la sua composizione per età è anormale; la classe 0-20 anni supera assai di poco quella 20-50.

La difettosa struttura demografica della popolazione esquimese dell'Alaska ci appare ancora più evidente se poniamo a confronto la composizione percentuale per età della popolazione esquimese dell'Alaska con quella della Groenlandia.

	Alaska (1910)	Groenlandia (1911)	
		Nord	Sud
0 - 20	47,4	52,1	50,1
20 - 50	44,6	38,9	39,3
51 e più	7,9	8,9	10,5

Mancano purtroppo dati sulla natalità e mortalità nell'Alaska, ma ritengo di non errare affermando che nell'Alaska la riproduttività degli esquimesi deve essere assai bassa.

Esaminando le 14 tribù in via di estinzione abbiamo visto come sia alterata la loro composizione per età. Il gruppo d'età 20-50 è maggiore di quello 0-20 anni: gli adulti sono in maggior numero dei giovani; ciò significa che la bassa natalità e forse una alta mortalità

(1) Ho compreso in questo gruppo gli appartenenti a tribù non precisate, esquimesi viventi fuori del loro habitat, ecc.

impediscono alla popolazione di rimanere stazionaria. Nel corso di poche generazioni queste tribù saranno del tutto scomparse.

Ma nelle tribù ancora numerose, come ci risulta dai dati, si vanno formando dei piccoli gruppi di meticci. Sinora essi formano appena il 6 % della popolazione totale; forse, se essi aumenteranno e se si potrà effettuare una accentuata commistione di sangue, la composizione per età ne resterà avvantaggiata.

Un lieve, ma sicuro sintomo di questo miglioramento ci vien dato dal fatto che delle venticinque tribù esaminate, quelle generalmente che presentano una maggior percentuale di meticci, presentano anche una migliore composizione per età.

IV.

Le isole Aleutine.

Pochissimi dati si hanno sugli indigeni di queste isole.

La popolazione delle isole Aleutine contava prima dell'arrivo dei Russi 25.000 anime (1). Questa cifra, per quanto sia basata solo sulla tradizione indigena, è ritenuta esatta. Il DALL (1) osserva che essa non è eccessiva a giudicare dal gran numero di località in cui sorgevano le loro dimore oggi abbandonate.

Ho già accennato alle lotte che avvennero in seguito tra Russi e Aleutini. Gli indigeni non disponevano che di frecce contro le armi da fuoco dei bianchi e naturalmente ebbero la peggio. Si trovarono rapidamente in assoluta balia dei commercianti russi che li trattarono con grande crudeltà e brutalità. Questo trattamento ebbe per effetto di ridurre nel corso di un secolo (1749-1849) il numero degli Aleutini in ragione del 94 %. I superstiti furono tenuti in condizione di schiavitù nei posti di commercio.

Dopo il 1794 il governo intervenne per regolare i rapporti tra indigeni e bianchi migliorando così le condizioni dei primi.

Nel 1824 (1) il Missionario VENIAMINOFF iniziò la sua opera di protezione degli Aleutini. Grazie ai suoi sforzi ed a quelli dei suoi collaboratori della chiesa greca tutti gli Aleutini furono cristianizzati ed educati sotto la guida dei missionari.

Nel 1834 VENIAMINOFF stimò il numero degli Aleutini pari a 2247. Nel 1848 secondo il Padre SHASNEKOV gli Aleutini erano 1400.

(1) *Handbook of American Indians*. (Russian influence), (Smith. Inst.).

Ma nello stesso anno, qualche tempo dopo, una fortissima epidemia di vaiolo ridusse il numero degli Aleutini a 900.

Nel 1874 DALL stimava la popolazione a 2005 abitanti di cui molti erano meticci. Il censimento degli Stati Uniti del 1890 dà 968 Aleutini e 734 meticci; un totale cioè di 1702 ab. Nel 1910 il loro numero si era ridotto a 1491 di cui 1002 indigeni puri e 489 meticci. Come appare dai dati, il numero degli Aleutini è aumentato rispetto al 1848. Non è improbabile però che la stima del Padre SHASNEKOV fosse errata. Comunque sia la popolazione aleutina è in via di estinzione sia dal punto di vista razziale, sia da quello numerico.

Gli incroci non hanno conseguito notevoli buoni effetti giacchè, così almeno ritengo, troppe circostanze lo impedivano. Sarebbero, credo, occorse migliori condizioni di vita, minore povertà, migliori condizioni igieniche ed un severo controllo sanitario.

CONCLUSIONI.

La popolazione esquimese, dopo avere occupato in passato estesissimi territori, è venuta gradualmente scomparendo. L'opinione corrente attribuisce alla cosiddetta « inciviltà bianca » la scomparsa della razza esquimese, come del resto di tutte le razze aborigene americane. I bianchi invasori, secondo tale opinione, avrebbero compiuto stragi, avrebbero danneggiato economicamente gli indigeni, avrebbero comunicato loro malattie e vizi, determinando così la loro scomparsa, che altrimenti non si sarebbe verificata.

Questo giudizio a parer nostro è avventato e non trova corrispondenza nella realtà delle cose. Questa ci prova anzi che in molti casi il contatto con i bianchi ha conferito vigore, attraverso gli incroci, alla razza indigena decadente ed in via di diminuzione. Tale è precisamente il caso della Groenlandia dove la popolazione contava nel 1721, all'inizio del contatto con i bianchi, da 6 a 8000 abitanti mentre nel 1924 essa contava quasi 14.000 abitanti.

La razza esquimese era in deficit demografico precedentemente all'incontro con la civiltà bianca. Questo fatto ci è provato dalla esiguità stessa dei vari gruppi esquimesi, in quell'epoca viventi, in confronto della enorme vastità delle terre artiche; questa esiguità non trova altre spiegazioni, giacchè è assurdo pensare ad un gruppo umano che ha tutte le caratteristiche di una razza a sè stante, che

non abbia mai sorpassato in complesso 30.000 individui. A parte poi questa considerazione, la maggioranza degli antropologi sostiene essere avvenute in tempi remoti, attraverso lo stretto di Behring gelato, grandi migrazioni di esquimesi dall'Asia in America. Gli odierni esquimesi sono i discendenti di queste antiche popolazioni immigrate in America; ma tali migrazioni che furono molto vaste, sia nel tempo che nello spazio, presupponevano gruppi numerosissimi di indigeni: forse queste migrazioni furono contemporanee e forse anche determinate dalla stessa espansione della razza esquimese. Solo in seguito, col volger del tempo, cessò la fase di sviluppo e la popolazione rimase stazionaria. Successivamente s'iniziò l'ultima fase: quella cioè di decadenza; la riproduttività diminuisce: le morti superano le nascite e subentra un costante deficit demografico.

Ricorderò infatti ancora che nel Labrador, come risulta da statistiche che si conservano nell'archivio delle Missioni Morave, i primi bianchi riscontrarono questo deficit demografico nella popolazione esquimese immune ancora dai contatti con la civiltà. A prescindere da tali contatti, la popolazione avrebbe continuato a diminuire; la razza soccombe lentamente sotto il peso della sua vecchiaia.

Ho esaminato in questo lavoro uno ad uno i sintomi di questa decadenza. Essi si riassumono nello sbilancio tra natalità e mortalità. La prima è inferiore alla seconda. Questo fatto è dovuto alla scarsa fecondità ed al debilitamento degli organismi, che esalta la mortalità e rende assai breve la durata media della vita. Dove mancano i dati sulla natalità e mortalità, questo stato di cose traspare dalla composizione della popolazione per età. Così per es. nell'Alaska le classi giovani sono poco numerose in confronto delle classi adulte; l'istogramma di una popolazione demograficamente sana e robusta si può dire sia approssimativamente dato da una piramide, alla base della quale sono le classi più giovani, al centro le adulte, al vertice le classi vecchie.

Nelle popolazioni demograficamente malate la piramide si deforma: la base si restringe ed il centro in proporzione aumenta, sicchè la piramide assume la forma di una trottola. L'equilibrio s'è alterato e da stabile è divenuto instabile.

Messa così in chiaro la decadenza della razza, esaminiamo quali siano stati gli effetti del contatto con i bianchi. Tali effetti si possono dividere in due categorie:

1) Effetti dannosi.

Rientrano in questa categoria i contagi che hanno importato tra

gli esquimesi epidemie varie, il diffondersi di malattie infettive, e che hanno diffuso tra essi la tubercolosi e le malattie sessuali. Abbiamo già notato come tutte queste malattie abbiano potuto produrre danni assai più rilevanti che altrove, solo per l'indebitamento fisiologico caratteristico degli indigeni, e per la loro mancanza di poteri di resistenza immunitaria.

Bisogna inoltre ricordare, per quanto i suoi effetti non siano stati molto gravi, l'alcoolismo. Un altro dannoso effetto si riscontra nelle conseguenze dell'abbandono della vita nomade in seguito al contatto con la civiltà. Tale abbandono porta con sè il cambiamento del sistema di nutrizione, con le sue conseguenze svantaggiose per l'organismo, e l'accentrarsi degli indigeni presso i luoghi costieri abitati dai bianchi e frequentemente visitati da navi straniere. Viene così facilitato il diffondersi dei contagi anche perchè gli indigeni vivono in queste località raggruppati in maggior povertà e sudiciume.

2) Effetti buoni.

Alcuni tra questi sono diretti a compensare gli effetti dannosi sopra elencati; ricordiamo l'opera dei Missionari Moravi nel Labrador, tendente al miglioramento dei costumi e delle condizioni igieniche, e l'opera del governo Danese svolta nel campo economico e nel campo sociale in Groenlandia.

Ma il fattore più importante è quello degli incroci. Abbiamo visto, infatti, come questi portino, nel nostro caso, ad un sicuro miglioramento fisiologico della razza. Abbiamo notato, in Groenlandia, l'aumentare della natalità, il diminuire della mortalità, l'allungamento della durata media della vita: effetti, tutti questi, determinati dal diffondersi degli incroci.

Bisogna ora porsi il problema da due punti di vista: dal punto di vista della razza e dal punto di vista numerico.

Quanto alla razza, la razza esquimese va scomparendo, e nulla potrà impedire la sua prossima scomparsa. Questa potrà, nei vari paesi, essere più o meno lenta a seconda dell'intensità della scadenza stessa della razza ed a seconda della varia intensità degli agenti esterni.

Se tralasciamo il criterio « razza » vediamo che il problema di queste popolazioni è impostato sul giuoco delle seguenti tre forze:

I) tendenza interna (biologica) della razza a scomparire.

II) agenti esterni negativi (effetti dannosi del contatto con la civiltà).

III) agenti esterni positivi (effetti buoni del contatto con la civiltà).

Impostato su questa base, il problema può essere posto in concreto per ogni gruppo indigeno. Ad es. nella Groenlandia notiamo l'assenza quasi completa di agenti esterni negativi, ed una massima intensità degli agenti esterni positivi (incroci e politica protettiva), tale da neutralizzare completamente la tendenza della razza a scomparire, dando luogo al sorgere di nuove forze germinative e di una nuova popolazione razialmente diversa dalla preesistente.

Nel Labrador, invece, gli agenti esterni positivi compensano solamente gli agenti negativi. Persiste perciò la tendenza della razza a scomparire diminuendo numericamente.

Quanto all'Alaska, gli agenti esterni positivi sono stati assai deboli; gli agenti esterni negativi (specialmente nel campo igienico) sono stati abbastanza intensi. La popolazione è infatti assai diminuita. Solo negli ultimi tempi si sono diffusi gli incroci; l'avvenire, perciò, di questa popolazione dipenderà dal più o meno intenso aumentare degli incroci e dalle più o meno buone condizioni igieniche avvenire. Dato il numero relativamente grande degli esquimesi dell'Alaska si può ancora sperare nel benefico effetto di tali forze.

Dove invece gli agenti esterni positivi sono stati nulli o quasi, e gli agenti esterni negativi sono stati forti, la marcia verso l'estinzione si è accelerata più o meno a seconda della loro intensità.

Tale intensità è stata assai forte nel caso degli Aleutini, che sono infatti rapidamente diminuiti di numero. Essi, nel corso di un secolo (1749-1848), come s'è visto si sono ridotti di numero in ragione del 94% circa!

Sono in seguito diminuiti di intensità gli agenti esterni negativi e contemporaneamente si sono sviluppati numerosi incroci, tanto che si è notato un miglioramento demografico.

Ma tuttavia dato il limitato numero degli Aleutini, si possono nutrire poche speranze.

Abbiamo voluto mettere così in evidenza come non si debba attribuire al contatto con i bianchi la prossima estinzione della razza esquimese, ma come si debbano invece ricercare le cause prime di tale fatto in fattori interni di ordine biologico.

ANDRÉ ANDRÉADÈS.

La population de l'Attique aux V^e et IV^e siècles ⁽¹⁾

Athènes attire plus que jamais l'attention. Après l'avoir de tout temps étudiée du point de vue historique, artistique et littéraire, on l'examine aussi fort attentivement du point de vue diplomatique, social et financier. En effet deux des phénomènes qui dominent actuellement le monde: l'impérialisme et la finance sociale, ont fleuri dans la cité de Pallas. Celle-ci est même le seul état de l'antiquité où ils se soient tous deux manifestés, ou tout au moins le seul état pour lequel nous ayons des renseignements quelque peu détaillés sur leur apparition, leur développement et leur conséquences. L'histoire athénienne est donc la seule dont nous puissions à ce double point de vue, tirer des enseignements pour l'heure présente.

(1) DAVID HUME, *Of the populousness of Ancient Nations* (dans les *Essays*, 1752); BOECKH, *Economie Politique des Athéniens*, (I,VI); WALLON, *Histoire de l'Esclavage dans l'antiquité* (I,222-277); J. BELOCH, *Die Bevölkerung der Griechisch-römischen Welt* (1886); MOREAU de JONÈS, *Statistique des peuples de l'Antiquité* (1851); GUIRAUD, *La population de la Grèce dans Etudes économiques sur l'antiquité*, p. 121 et suiv. (voir du même, *La main d'oeuvre et La Propriété foncière en Grèce*, p. 157-159); CASTORCHIS (dans la revue *'Αθήναιον*, III 99 et suiv.) et PANAYIOTIDÈS, *Ὁ πληθυσμὸς τῆς ἀρχαίας Ἀττικῆς* (1896); MEYER, *Wehrkraft, Bevölkerung und Bodenkultur Attikas* (in *Forschungen*, t. II 149); ETTORE CICCOTTI, *Il tramonto della schiavitù nel mondo antico* (Turin, 1899); OTTO SEECK, *Die Statistik in d. alten Geschichte* (in *Jahrbücher für Nationalökonomie u. Statistik*, 3^e série, XIII^e tome, 1897, p. 161-76); H. DELBRUCK, *Geschichte d. Kriegskunst* (2^e édition 1908, t. I, p. 13 et suiv.) et les ouvrages plus généraux de WILAMOWITZ (*Aristoteles und Athen*, t. II, p. 201 et suiv.), FRANCOTTE (*Industrie dans la Grèce antique*, t. I, p. 160 et suiv.), GERNET, (*L'approvisionnement d'Athènes en blé*, p. 271 et suiv.) etc. etc. — Les plus

Tant l'étude de l'impérialisme que celle de la question sociale pré-supposent des renseignements précis sur la population, son montant et sa répartition. On s'est efforcé d'en recueillir. Jusqu'ici on n'a abouti qu'à des conclusions assez contradictoires. Nous avons souvent reçu les doléances d'économistes n'arrivant pas à se débrouiller au milieu de celles-ci, et réclamant un résumé succinct de la question. Le but du présent petit article est de fournir l'aperçu demandé; il se tient nécessairement dans des lignes très générales, mais une bibliographie comprenant les sources et toutes les publications essentielles permet de compléter ses renseignements. Il est presque superflu d'ajouter que dans les villes grecques la population se composait de trois éléments: les citoyens libres, les esclaves et les étrangers domiciliés ou métèques.

Nombreux sont les écrivains qui ont traité de la population de l'Attique aux temps classiques, et variés les chiffres auxquels ils ont abouti. On relève pourtant deux tendances principales. Les uns se basent sur les quelques renseignements démographiques que nous a légués l'antiquité. Les autres estiment ces renseignements manifestement exagérés, ils les écartent et essaient d'édifier d'autres calculs sur ce que nous savons de l'armée, du sol, des importations de céréales et de la vie économique en général. BOECKH, PAPARRÉGOPOULOS et CASTORCHIS appartiennent à la première école; s'appuyant prin-

importantes de ces études sur la population, y compris celle de HUME, sont traduites au t. IV de la « Biblioteca di Storia Economica » (Milan 1909); outre une introduction générale, CICCOTTI y a joint une courte dissertation sur le nombre des esclaves; depuis, CAVAIGNAC a publié *Population et Capital dans le monde antique*, où (p. 55-8) il résume et complète les renseignements donnés ailleurs, entre autres dans « Viertelj. f. S. u. Wirtschaftsgeschichte » IX, p. 1-30, BELOCH a consacré à la question le chapitre XXXVI du t. 3 sect. III, de la 2^e édition (1923) de son histoire; c'est à ce livre que nous renverrons chaque fois qu'il sera question de lui; JARDÉ (dans *Les Céréales dans l'antiquité grecque*, p. 136 et suiv.) a repris le sujet. La question du nombre des esclaves a été étudiée par Mme R. L. SARGENT, *The size of the slave population in Athens during the fifth and fourth centuries* (University of Illinois, « Studies in the Social Sciences », t. XII, n. 3, 1924); celle du nombre des soldats par G. E. FAWCUS, *The Athenian army in 431* (JHS. XXIX, 1919, 23 et suiv.). -- Voyez enfin A. ANDRÉ-ADÈS, *Histoire des finances grecques* (2^e édition complètement refondue, en grec, Athènes 1928) tome Ier (seul publié) pages 360-sq.

cipalement sur CTÉSICLÉE (1), ils estiment à un demi-million d'habitants environ la population de l'Attique. BELOCH réduit ce chiffre à 175 ou 200.000, MEYER et BUSOLT-SWOBODA à 230 ou 250.000.

La deuxième méthode gagne du terrain (2) principalement à cause des arguments qu'elle tire de l'agriculture (maximum de blé que pouvait produire l'Attique) et des renseignements de DÉMOSTHÈNE sur les importations de blé (3). Mais on ne peut dire qu'elle ait définitivement triomphé; nous verrons ci-dessous à propos des statistiques sur le nombre des esclaves (4) que les partisans de la première école (5) non seulement n'ont pas rendu les armes, mais font de nouvelles recrues (6). Des sceptiques enfin comme JARDÉ, reconnaissent que les renseignements des anciens sur la population sont exagérés, mais ils n'ajoutent pas non plus foi à ceux que nous possédons sur le nombre des soldats ou le commerce du blé; et plus généralement considèrent que, même si ces derniers chiffres sont exacts, ils ne sont pas assez abondants pour servir de base à des conclusions plus générales.

Il n'y a qu'un point dont tout le monde convienne : c'est le mouvement général de la population. Aussi allons-nous distinguer celui-ci des évaluations statistiques détaillées.

I. — *Aperçu de l'évolution démographique de l'Attique.* — De la bataille de Platées (479) à la guerre du Péloponnèse (431), la population s'est développée, moins par l'accroissement des citoyens, qu'entravait les expéditions en Asie, Egypte et ailleurs et les clé-

(1) Cet historien dans un passage conservé par ATHÉNÉE (VI, 103, p. 272 C), dit que « τὴν δεκάτην πρὸς ταῖς ἑκατόν ὀλυμπιάδα » DEMETRIUS eut recours à « δ'ἑξετασμὸν τῶν κατοικούντων τὴν Ἀττικὴν καὶ εὐρεθῆναι Ἀθηναίους μὲν « διαμυρίους πρὸς τοῖς Χιλίοις, μεροίκους δὲ μυρίους, οἰκετῶν δὲ μυριάδας μ' ».

Seul le dernier de ces chiffres a été sérieusement contesté, on croit même que c'est une faute de copiste.

Sur le recensement de DEMETRIUS de PHALÈRE, cf. W. S. FERGUSON, *Hellenistic Athens* (Londres 1911) p. 54 et les ouvrages concernant Démétrius.

(2) A telle enseigne que CAVAIGNAC, qui dans son *Histoire* (II, 330) évaluait la population du IV^e siècle à 300.000 âmes, la réduit à 200.000 dans un ouvrage plus récent, *Population* (p. 58).

(3) DÉMOSTHÈNE (*Leptine*, 32) dit que l'Attique produisait 400.000 medimnes de blé et en importait 800.000; GERNET conteste l'exactitude de ces données.

(4) Ce sont elles surtout qui ont soulevé les discussions.

(5) En particulier SEECK et GERNET.

(6) P. ex. KÖRTE.

rouchies (colonies militaires), que par l'affluence à Athènes et au Pirée de nombreux métèques et esclaves.

Pendant la guerre du Péloponnèse (431-404) l'ensemble de la population a sensiblement diminué, du fait de la grande peste (1), de l'agglomération de paysans à l'intérieur des Longs-Murs et du bouleversement de la vie économique; la population mâle (2) fut particulièrement atteinte tant par des campagnes très sanglantes (3) que par la disparition, pour causes diverses, de plusieurs milliers d'esclaves (4). Ces fléaux, auxquels vint s'ajouter la diminution des métèques, résultat fatal du ralentissement du commerce, font que la population d'Athènes, après la guerre, malgré le retour des Athéniens chassés des clérouchies (5), n'a guère dû dépasser les $\frac{3}{5}$ de la population d'avant guerre.

Le IV^e siècle vit ces plaies se cicatriser en partie. En effet, les guerres ne cessèrent pas, mais elles furent moins meurtrières, de plus elles étaient surtout menées par des mercenaires. Et, si l'agriculture tomba en décadence les clérouchies se raréfièrent. Enfin, dans la deuxième partie du siècle apparaît une renaissance économique, commerciale et même minière, qui dut avoir pour effet d'accroître le nombre des métèques et des esclaves.

(1) BELOCH estime cet abaissement à 25%. Mais THUCYDIDE, sur qui il se base, ne parle que des classes aisées; les classes pauvres durent être encore plus éprouvées.

(2) Le surnombre des femmes, conséquence de toute guerre, dépend de la mortalité chez les combattants. Après la guerre de 1914-18, dans l'ensemble des états belligérants, on a calculé qu'il y avait 1086 femmes pour 1000 hommes; en Angleterre (pour des individus entre 21 et 45 ans) cette proportion a varié de 1200 à 1300; cf. A. ANDRÉADÈS, *La population de l'Angleterre et la grande guerre*, (« Bibliothèque de Metron » n. 1.) p. 77 et suiv, et *Le troisième sexe en Angleterre*, en « Revue de la Semaine » n. du 7 avril 1922.

Après la guerre du Péloponnèse la situation devait être encore pire; XÉNOPHON (*Mem.* II, 7) parle d'un citoyen qui en 404-3 eut à nourrir quatorze parents.

(3) C'étaient surtout les citoyens et les métèques qui en faisaient les frais.

(4) La plupart des esclaves travaillant aux mines d'argent s'enfuirent; le nombre de ceux qui vivaient à la ville dut nécessairement diminuer, car la pénurie régnante força leurs maîtres à les vendre ou les empêcha de les remplacer, quand ils mouraient. La grande majorité des esclaves étaient achetés et non élevés à domicile.

(5) On les évalue à 3 ou 4.000.

II — *Les évaluations.* — BELOCH a essayé (p. 418) de donner une idée concrète de l'évolution résumée dans les lignes qui précèdent, par le tableau suivant:

Année	Citoyens	Métèques	Esclaves	Total
431 (1)	120.000	30.000	80.000	230.000
425	90.000	22.500	60.000	170.000
403	80.000	22.500	35.000	140.000
355	90.000	30.000	65.000	185.000
338	93.000	37.500	85.000	215.000
313	80.000 (2)	37.500	90.000	210.000

Mais ces chiffres, s'ils marquent assez exactement le mouvement général de la population, reflètent par trop dans les détails les conceptions de l'auteur. Car on n'est pas d'accord sur le nombre des citoyens, encore moins sur celui des métèques et des esclaves. Examinons une à une ces trois catégories:

a) *Les citoyens.* Nous possédons, en particulier pour le V^e siècle, quelques renseignements sur le nombre des Athéniens qui prirent part à des guerres; mais ils ne concernent pas l'ensemble des troupes, et nous ne connaissons pas de source sûre le rapport du nombre des mobilisés à l'ensemble des citoyens; aussi les conclusions qu'on base sur les chiffres précités varient-elles entre 30 et 60.000 hommes (3). Pour la fin du IV^e siècle, il semble que nous ayons une base plus solide, puisqu'on admet avec CTÉSICLÉE (4), qu'à l'époque de DÉMÉTRIUS de PHALÈRE les citoyens étaient 21.000; mais comme, d'après

(1) Pour l'époque antérieure aux guerres médiques, CAVAINAC (p. 55) estime à 100.000 le nombre des citoyens, mais croit impossible de fixer un chiffre pour les métèques et les esclaves.

(2) De 338 à 313 la baisse de la population doit être imputée à l'émigration de milliers de citoyens dans les terres conquises par Alexandre et à l'établissement par Antigonos de plusieurs milliers d'Athéniens en Thrace (cf. PLUTARQUE, *Phocion*, 28; DIODORE XVIII 18,4).

(3) Le maximum est donné par WILAMOWITZ et FRANCOU. Les autres donnent: MEYER 55.000, CAVAINAC 45-50.000, y compris les clérouques, BELOCH 40.000, DELBRUCK 36.000 et BUSOLT 30-60.000.

(4) Cf. ci-dessus, p. 5 n. 1.

certain auteurs, l'historien ne songeait qu'aux hommes en état de porter les armes, on se demande s'il ne faut pas ajouter 10.000 autres citoyens, soit 7.000 n'ayant pas atteint 18 ans, et 3.000 au dessus de soixante; si ces conjectures sont exactes, le nombre des femmes devait de son côté être, non de 20.000, mais de 30.000 environ.

b) *Les Métèques*: Pour ceux-ci les difficultés sont plus grandes encore. En effet, 1^o) les renseignements sur les hommes aptes au service militaire ne nous permettent aucune conclusion générale; beaucoup de métèques avaient laissé leurs familles dans leurs patries, et nous ne pouvons rien dire du nombre des vieillards, femmes et enfants (1); 2^o) nous n'avons, sur les métèques sous les armes, qu'un renseignement (2) et de peu secours, car il concerne les hoplites; or la plupart des métèques servaient dans la marine. On ne peut donc s'étonner si les chiffres proposés pour le nombre des métèques, variant entre 10.000 et 45.000 (3), sont plus conjecturaux que ceux qui ont été avancés pour le nombre des citoyens. Pour l'époque de DÉMÉTRIUS de PHALÈRE, nous avons une donnée plus certaine (4) dans le passage connu de CTÉSICLÉE (5), qui, nous l'avons vu, estime le nombre des métèques à 10.000, presque la moitié de celui des citoyens; ce fait est confirmé par la remarque de BELOCH (p. 410) que le *Corpus Inscriptionum Atticarum* renferme, pour 100 inscriptions funéraires de citoyens, 60 de métèques (6). La même proportion pouvait fort bien se trouver cent ans avant, du moins en ce qui touche la population urbaine.

(1) L'existence à Athènes de femmes métèques, exerçant divers métiers (y compris celui de nourrice) et vivant seules, complique encore les choses.

(2) THUCYDIDE (II, 31, 2) dit qu'en 431, trois mille métèques servaient comme hoplites.

(3) FRANÇOTTE les évalue à 45.800 pour les deux sexes (I, 173); il estime à 12.000 les mobilisables, à 2.000 les vieillards et à 8.800 les enfants, soit en tout une population mâle de 22.900, et autant de femmes. La plupart des auteurs (cf. pour les détails BUSOLT-SWOBODA p. 763) estiment de 9 à 15.000 les métèques en état de porter les armes, mais se montrent plus réservés quant au reste de la population.

(4) Cependant pas absolument sûre car: 1.) on ne sait si DÉMÉTRIUS de PHALÈRE a enregistré tous les habitants ou seulement ceux qui étaient en état de porter les armes (cf. ci-dessus; 2.) on ignore la proportion des femmes dans la classe des métèques.

(5) Cf. ci-dessus p. 3, n. 1.

(6) 690 contre 1141.

c) *Les esclaves*: Ici, les divergences d'opinion sont extrêmes. Il existe deux sources: CTÉSICLÉE, qui estime leur nombre à quarante myriades ou quatre-cent mille " εἰς μυριάδας μ' ", (1), et un passage conservé par SUIDAS (2), selon lequel HYPÉRIDÈ après la bataille de Chéronée proposait aux Athéniens d'affranchir et d'armer 150.000 esclaves " πρῶτον μὲν μυριάδας πλείους ἢ δεκαπέντε (τοὺς δούλους), τοὺς ἐκ τῶν ἔργων τῶν ἀργυρείων καὶ τοὺς κατὰ τὴν ἄλλην χώραν ",.

C'est en s'appuyant principalement sur la première source, qu'il rectifie légèrement, que BOECKH (1,49) a porté le nombre des esclaves à 365.000. MOREAU de JONÉS, CASTORCHIS, PAPARRÉGOPOULOS l'ont suivi. Mais ce chiffre de CTÉSICLÉE, qui avait paru déjà excessif au 18^e siècle à HUME (lequel le réduisait à 160.000), fut plus tard jugé inconciliable avec la quantité de blé consommé, le développement de l'industrie (3) et certains passages de THUCYDIDE, celui p. ex., où (VI, 27, 5) il présente la fuite de 20.000 esclaves comme une lourde perte (4), où (VIII, 40, 2) celui où il dit que Chio avait plus d'esclaves que toute autre cité, sauf Sparte (5). Sur la foi de ces témoignages, BELOCH, FRANCOTTE et d'autres estimèrent que la population servile ne dépassa jamais 100.000 et que souvent même ce maximum fut loin d'être atteint (6). Cette conclusion (7) est aussi celle de Mme R. L. SARGENT (8).

(1) Loc. cit.

(2) Ἀπεψηφίσατο; cf. Fragm. 29, Blass, 3. édition.

(3) Etant donné que les esclaves occupés à l'agriculture et à la métallurgie et ceux que l'âge rendait inaptes au travail, ne pouvaient dépasser 150.000 l'industrie aurait du utiliser 250.000 esclaves, ce qui est tout à fait invraisemblable.

(4) Elle n'aurait pas été si sensible si elle n'avait représenté que le vingtième de la population des esclaves.

(5) Chio ne pouvait guère nourrir plus de 100.000 esclaves; et le nombre des Hilotes n'atteignait pas 200.000.

(6) Il serait même tombé à 35.000 à la fin de la guerre du Péloponnèse.

(7) 70-100.000 sous Périclès; 60-70.000 vers le milieu du IV. siècle.

(8) Celle-ci remarque que les maîtres d'esclaves dont il est question dans les discours judiciaires étaient de gens riches, par suite leurs « familiae » devaient être plus nombreuses qu'à l'ordinaire. En outre elle estime que la terre cultivable en Attique n'excédant pas 150.000 stremmes (arpents) et chaque cultivateur en possédant 7 à 8, le nombre des agriculteurs, hommes libres et esclaves, en Attique, ne devait pas dépasser 20.000 hommes.

L'originalité de l'étude de Mme SARGENT réside dans l'examen très précis des différentes catégories d'esclaves, répartis selon leur travail (services

Malgré tout, l'ancienne hypothèse n'a pas été complètement abandonnée; elle a pour elle une scholie ancienne de PINDARE (VIII, 30) sur le nombre des esclaves à Égine; elle est encore défendue par GUIRAUD (qui dans sa *Main-d'oeuvre*, p. 103, évalue le nombre des esclaves à 300.000), SEECK, GERNET, BÜCHER et récemment A. KÖRTE (1).

Par ailleurs, d'après ETTORE CICCOTTI (2), BOECKH comme ses adversaires ont eu tort de faire fi d'HYPÉRIDE, et il prend celui-ci pour base de ses propres évaluations. La même source est acceptée par MEYER (3), qui voit pourtant dans le chiffre de 150.000 un maximum. Remarquons cependant qu'HYPÉRIDE parle nettement d'esclaves capables de porter les armes; d'après ces données le nombre total des esclaves en Attique serait de 250.000, non de 150.000 (4) et l'ensemble de la population se monterait à peu près à 400.000 âmes, alors que MEYER n'admet pas qu'elle eût pu dépasser 250.000.

III. — *Conclusion.* — Il est difficile de se prononcer sur une question que JARDÉ (5) qualifie à raison « d'irritante et probablement insoluble ». Nous pouvons pourtant tenir pour probables les faits suivants:

1⁰) *les citoyens* devaient à la veille de la guerre du Péloponnèse, dépasser sensiblement le nombre de 30.000 pour les raisons ci-dessus indiquées, et en outre parce que: a) Selon ARISTOTE (*République des Athéniens*, ch. 24) vers 420, c'est à dire quand l'institution du salariat politique n'avait pas encore été généra-

privés, industrie, agriculture, mines, services publics) et leur âge. Les résultats ainsi obtenus sont plus certains; cependant JARDÉ (R. E. G. XXXIX, 1926, p. 377-8) pense que les documents étaient insuffisants pour permettre à Mme SARGENT des conclusions plus générales sur chaque classe.

(1) *Die attische Demokratie des IV. Jahrhunderts*, Historische Vierteljahrsschrift XXII, 1924-5, p. 148-9.

(2) *Del numero degli Schiavi nell'Attica* (R. C. Istituto Lombardo, vol. XXX 1897; republié au t. IV p. 585-600 de la « Biblioteca di Storia Economica »).

(3) *Forschungen*, II, 188.

(4) Plus haut (p. 5) les citoyens en état de porter les armes sont estimés les $\frac{2}{3}$ de la population mâle, soit $\frac{1}{3}$ de la population totale (21.000 sur plus de 60.000); dans la population servile, les femmes et les enfants étaient relativement peu nombreux, mais bien qu'en plus forte proportion, les hommes en état de porter les armes ne pouvaient guère dépasser les $\frac{3}{5}$ de l'ensemble.

(5) Cf. son article sur l'ouvrage de Mme SARGENT.

lisée, les citoyens salariés excédaient 20.000; b) au début de la guerre la population athénienne était supérieure à celle de toute autre ville grecque “ ὅσος οὐκ ἐν ἄλλῳ ἐνὶ γῆ Ἑλληνικῇ Χωρίῳ », (1); même après la guerre, quand elle eut considérablement diminué, XÉNOPHON (2) et PHILOCHOROS (3) appellent Athènes la plus peuplée et la plus grande des cités hellènes; c) La population rurale, qui est toujours la plus féconde, n'avait pas encore baissé. La décadence de l'agriculture au IV^e siècle explique par contre que cent ans presque après le désastre d'Aegos-Potamos, même en interprétant largement les chiffres de CTÉSICLÉE (4), on voie le nombre des citoyens bien inférieur au chiffre atteint le siècle passé.

2^o) les *métèques* égalaient la moitié des citoyens (5).

3^o) quant aux *esclaves*, les anciens avaient tendance à en exagérer le nombre : Athénée dans le même passage (6) où il cite CTÉSICLÉE selon qui ATHÈNES en avait 400.000, dit d'après d'autres sources, que les Corinthiens en possédaient 460.000 et les Éginètes 470.000, ce qui « constitue une exagération manifeste (7) ».

Le nombre de 150.000 donné par HYPÉRIDE est peut-être plus acceptable mais avec interprétation large du passage qui s'appliquerait à l'ensemble des esclaves et non seulement au nombre d'hommes aptes au service militaire. Encore serait-ce un maximum.

(1) THUC. I, 80. C'est un des arguments d'Archidamos contre la guerre. CLERC (*Les métèques athéniens*, p. 376) pense que si les Athéniens purent tenir longtemps contre tant d'ennemis, c'est grâce à leur nombreuse population, comme c'est grâce à la supériorité numérique de la France que Louis XIV put faire face à l'Europe entière.

(2) *Hellenica* II, 3, 24.

(3) Cité par DIDYMOS; cf. FOUCART, *Études sur Didymos* (Paris, 1902) p.99.

(4) Si nous admettons, pour le nombre des citoyens, 31.000 au lieu de 21.000 (cf. p. 5).

(5) Cela paraît certain au IV^e siècle (cf. ci-dessus p. 5); pour le V^e siècle, CLERC suppose qu'ils représentaient les $\frac{4}{6}$ du nombre des citoyens; je ne doute pas que le nombre des étrangers à Athènes ne fût alors considérable mais j'hésite à souscrire à cette opinion car: a) avant que le salariat politique ne fût répandu, beaucoup de citoyens travaillaient comme marchands ou artisans; b) et surtout la population rurale était plus nombreuse et les *métèques* assez rares à la campagne.

(6) VII, 272.

(7) GLOTZ, *Le travail dans la Grèce antique* p. 239.

FREDERICK ADAMS WOODS.

**Aristocracies and mental evolution
or social « conification ».**

In this contribution to « Metron », I would like to discuss briefly the results of some statistical investigations which indicate that normally there are forces at work tending to improve the biological quality of the extreme upper portions of the social structure. Furthermore these evolutionary changes have been found to be actually taking place.

These researches have extended over a period of twenty-five years and have been published in various books and journals but have not hitherto been brought together in one place. They deal with data derived from the history and genealogy of the royal families of Europe, from the British peerage, and from the Dictionary of National Biography. Also data from American records have been analysed, studies in three social classes in eastern Massachusetts and reports of graduates of Harvard College. Unless otherwise stated all the researches are my own.

Aristocracies, whether social or intellectual may be pictured graphically as occupying the top of a somewhat cone-shaped diagram, the base of which is formed by the proletariat. The various social classes are numerically stronger towards the lower portion of the structure, but not at the extreme bottom. The worst classes of all, the paupers, criminals and mental defectives are again less numerous than the laboring classes, therefore the cone must be drawn with a small curved base pointing downward.

If the social structure becomes more aristocratic the cone becomes higher and more finely pointed at the top. The process may be called *conification*, for want of a better word. The term *aristogenesis* may be used but is not so graphic.

The *a priori* reasons for believing that aristogenetic mental evolution should take place in all civilized countries have been discussed in the final chapter of *The Influence of Monarchs* (1913) (6). In order to make the point clear it will be necessary to refer briefly to some of these theoretical considerations. The theory of « social conification » depends on several biological and sociological generalizations. First superiority tends to rise, second superiority tends to be inherited; third, those who push their way up in the social scale tend to mate their offspring within the group to which they have arisen. Some of the sons exceed their parents, and so push higher still. Worldly ability is correlated with the attainment of power and riches. Pride of family, and the inheritance of property lead in the same direction. Within the upper group the superior members leave more adult offspring than the inferior.

By this process, « to him who hath shall be given », and it means a smaller and smaller percentage at the top which mounts higher and higher until like a thin glass or porcelain flask it is so delicate at the top that it is liable to break, either from forces within itself or from class wars, revolutions or foreign conquests.

This pushing upward of the upper class, may or may not theoretically be combined with a pushing downward of the proletariat. If such a separation is actually found it falls in line with the theory of « conification ». It would seem that both in Europe and in the United States there is evident of such an increased separation of the upper and lower classes in a biological manner.

EVIDENCE FROM ROYALTY.

The history of the royal families of Europe affords abundant material for the biological study of aristocracy. Here there is no convincing evidence of degeneracy due *per se* to their assumption of rank and power. The degenerate lines when long perpetuated can be shown to be the result of unwise marriages which have bred in and thus maintained insanity or moral degeneracy. Male lines free from these taints have continued normal through many generations unless contaminated on the female side.

There is, moreover, evidence of mental and moral survival within this ultra-aristocratic group, as is shown by the following series of figures. Grade (1) is the lowest for moral virtues used in the widest

sense, and grade (10) is the highest. The individuals number over six hundred and most of them naturally fall in the middle grades (4), (5), and (6).

Grades for virtues .	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
Average number of adult offspring. .	1.66	2.86	2.99	2.41	3.44	3.49	3.05	3.03	3.93	3.80

The figures mount from left to right in a series that is sufficiently regular to satisfy anyone conversant with statistical technique without computation of the probable error.

The gradings were made for another purpose namely heredity, or the correlations between successive generations. The grading was done in part objectively in part subjectively. (2), (1).

The next bit of proof that there must be some natural forces working towards mental evolution (at least among this aristocratic class lies in the fact that there is a very significant correlation between these grades for virtues and the grades already made for intellectual differences. The following figures show a very satisfactory rise from left to right. Every grade for virtue shows a higher and higher average intelligence, except grade (5) which is slightly lower than grade (4).

Grades for virtue. .	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
Average intellectual grades	3.92	4.34	5.43	5.51	5.29	5.66	5.87	6.37	6.66	7.33

The mathematical correlation for intellect with virtues is here about + .30. These figures were published in «Popular Science Monthly» (1903). The amount of the correlation was not then determined but was computed and published in *Heredity in Royalty* (1906). To my mind the magnitude of the correlation is not as interesting and not as significant as the fact that the figures mount with such remarkable regularity. By a different method and dealing with the traits of school children, PEARSON, about the same time found a positive correlation between intelligence and certain specific desirable traits of character. It has more recently been proved that delinquent children and some types of criminals are on the average deficient in native intelligence. My own thesis at present is that there exists a mental evolution of aristocracies leading toward a «conification» of social groups. Any evidence derived for other classes of society if confirmatory, is to some extent a valuable addition. It all tends

to justify the methods of historiometry especially if the results have been obtained from data in no way dependent upon historical sources of information.

EVIDENCE FROM GREAT BRITAIN.

The theory of social conification means a pushing upward at the top and also a pushing downward of some of the middle classes. In this way the upper and the lower classes become more and more separated from one another. Evidence for such a pushing downward can be found in English history, in the data contained in the *Dictionary of National Biography*. This scholarly work is a collection of the lives of nearly all eminent British persons from earliest times until about the commencement of the twentieth century. The births and parentages of the individuals are usually given.

For the main body of the work it appears that, of those especially eminent, 11.7 % were the sons of craftsmen, artisans, and unskilled laborers. This is for men born from the commencement of English history to about the opening of the nineteenth century.

The supplementary volume, which deals only with more modern men (those born chiefly during the first quarter of the nineteenth century) shows a smaller percentage descended from these same classes. ELLIS reports in his *Study of British Genius*, p. 77 2^d Ed. none for these three classes. This compilation is largely objective, is not related to any theory and can be relied upon for its historical detail. The *Dictionary of National Biography* on which it is based is generally regarded as one of the most impartial of works.

I thought it would be interesting to see if there were any evidences that this was part of a constant tendency. When the second supplement came out, containing the names of men born during the second quarter of the nineteenth century I counted the percentage born from the same social classes and found the percentage to have sunk to 4.2. I found 7.2 for these born 1800-1825.

Here then are three figures which as far as they go give a series of declines. Three is small series, but the sharp breaks in the figures (11.7 — 7.2 — 4.2) were suggestive that perhaps similar series might be found elsewhere (1).

(1) In the completion of this computation I had the assistance of Mr. ALLEYNE IRELAND who has commented on these figures and my theory of conification in his *Democracy and the Human Equation*.

EVIDENCE FROM NEW ENGLAND.

This same process of conification is seen in another aspect in the history of aristocratic families in New England. (8) There is no place where genealogy and local history can be more satisfactorily studied than in New England and especially in Boston and its vicinity. Here a series of *three changes* has also been found showing that the upper classes, from a social-financial point of view, and also in at least one biological way are more separated from the masses to-day than they were in the seventeenth century.

In the early days of colonial life in New England the gentry or upper social class formed a rather clearly defined group. We have several ways of objectively classifying them. In this theocratic form of government all ordained clergymen belonged to the upper class. To these may be added all persons who generally bore the title of Mr; also college graduates may be added.

The great majority of the colonists belonged to a middle class known as yeomen. There were practically no people corresponding to what we may call to-day a pauper class. There was no class of criminals or defectives. Also there were no very rich or powerful noble families. The whole picture is that of an intelligent courageous and industrious group of people differing but little one from another.

I have made a study of the leading families (71 in all) who resided in Boston and the neighbouring towns; Cambridge, Charlestown, Watertown, Roxbury, Woburn, Concord and Groton prior to 1692. These have been traced downward through the 18th century and also to the present day. The total now exceeds 3000 names. The history of these families has been divided into three sections, ancient (prior to 1721), middle (1721-1820), and modern (1821-1921).

During this advance of time it is very clear that a comparatively homogeneous population, differing but little in wealth, has become more heterogeneous as far as wealth is concerned. In the 17th century the average yeoman as shown by the records of wills and inventories possessed an estate valued at about L. 100 to L. 300. If a man had more than L. 300 personal property he might with propriety wear lace. At least there was at one time a law passed forbidding the use of lace to persons not possessing L. 300 personal property. Well-to-do yeomen and gentlemen, in the then technical sense of the word, often possessed from L. 500 to several thousand pounds.

Rev. Peter Bulkeley, the founder of Concord, a member of a very old English family and one of the richest men among the early settlers brought with him from England about L. 6000. Robert Kayne of Boston left an estate in 1656 valued at L. 2569. Captain Thomas Brattle who died in 1683 left an estate of L. 7827. This according to SAVAGE, a careful authority on this period, was « probably the largest in New England »

Thus we see that the richest men were then not more than fifty times as rich the average. By the middle of the 18th century the differences had become somewhat greater. The two richest men, Colonel Eisha Doane of Wellfleet and Thomas Boylston of Boston were estimated as worth L. 100.000, perhaps 300 times that of the average citizen. By the middle of the nineteenth century the differences were even greater. In a book entitled, *Rich Men of Massachusetts* (1851), we find a number of persons estimated as worth a million dollars or more. The richest is placed at three million. This must be more the 600 times the average. The differences increase as we approach the present day. We find records of several fortunes at 20.000.000 or more. If we consider the United States as a whole, the very richest men to-day those who are worth 100.000.000 or more are certainly as much as 10.000 times to 100.000 times as rich as the average person. There can be no question that, as far as the distribution of wealth is concerned, there has been in America a process of conification. New York, Pennsylvania, Virginia, and the Southern States and the newer Western States would in all probability show the same financial conification.

The wealth of the average citizen has risen somewhat, but the point of the cone has risen faster than the mass. If the mass be represented in a graph, as one centimeter high, the top of the drawing would have to be carried up at least 100 meters in the air.

Financial conification has already been generally recognized; biological conification, as a process, has not. Any evidence that the different social castes are being further and further separated one from another, as regards the important matter of marriages is significant towards establishing a general theory of conification.

In the history of New England we find such evidence within the first group studied, i. e. these 3000 persons here included. In the present article only the results can be presented and as briefly as possible. The individuals were placed in one of three social classes; gentry at the top, yeomanry at the bottom and an artificial class

called « officer yeomanry » between the two. The classification was made in consultation, with the expert advice, of Mr. GARDINER BARTLETT the well known genealogist of the New England Historic Genealogical Society. Three divisions were then made in point of time; First prior to 1721: Here it was found that out of 204 cases of marriage, 48 or 23.5 percent were cross-marriages between the upper and the lower of the three social grades. A somewhat different method with quite different material yielded a confirmation, inasmuch as the first 100 marriages furnished 23 percent of cross-marriages.

The second period (1721-1820) has not been put to statistical test on this score. It is evident from inspection that there is not any very great change from the earliest period though probably the process of conification is beginning.

It is the third or nineteenth century period (1821-1920) that shows the striking change. Here the first 152 marriages made among the upper of the three classes yields instead of 23 (or 23.5) % certainly less than 6 % as cross-marriages between the upper and the lower classes.

If we look at it another way, out of 204 marriages from families of the gentry in the earliest period, 119 or only 58.3% were within their own grade. During the third period subsequent to 1820, at least 94% have been strictly within the same upper social class. The immigration of a non Anglo-Saxon element in the population of Massachusetts has not introduced any errors or complications into the research since the families studied are the same ones from start to finish. As far as these families go they have not made any marriages into the non Anglo-Saxon stocks.

In determining the social position of the living and recently living individuals the *Social Register* has been used supplemented by local histories and the files of old newspapers, obituary notices etc. Of the 152 marriages all but 9 are within the same upper class which in the old days was often spoken of as the « gentry » and which to-day is more often described as « fashionable » society. Of these nine, only two are distinctly outside this same fashionable class, the other seven are either difficult to grade or obscure and have been classified as if they were known to be outside. Thus we can be very sure of our conclusions. There is evidence of a recent and rapid caste formation taking place in the United States during the last century. This concerns not only wealth but also marriage.

There is good evidence that these socially prominent Massachusetts families have produced very much more than their share of notable men.

19 of these persons who are included in the prominent families of the recent period are at least of the grade of eminence indicated by inclusion in *Who's Who in America*. This degree of eminence has been estimated as the same as one man in 824 (1).

Several of these names are very famous and are to be found in more exclusive lists such as standard encyclopaedias, and LIPPINCOTT'S *Biographical Dictionary* of the world. One of them, Phillips Brooks has been elected to the United States « Hall of Fame » (2). Thus this group has gone at least twenty or thirty times beyond random expectation.

SURVIVAL OF ABILITY.

The next point that we have to consider is the evidence for a survival of ability within the same New England States. The population is said to be dying out, but is it not at the same time improving? We have heard a great deal about race suicide and very little about any evidence of racial improvement.

If the better classes among Anglo-Saxons in the United States are averaging to have less than two children apiece, then these classes must be numerically declining. If formerly they were, say 10% of the total population, the ten per cent must sink to 9%-8%-7%, and so on. We do not know these figures exactly, but we do not need to have more than approximate knowledge to visualize what is taking place. If the decline should stop at say 5% and the quality of this 5% should improve, then the outlook would not be discouraging.

I have no figures showing an actual lessening of the decline, but I have figures and conclusions now confirmed by other investigators showing a genuine improvement within what may be regarded as a substantial portion of the apex of the social cone in the Eastern section of the United States. (10) (9).

(1) D. R. BRIMHALL, *American Naturalist*, 1923. *The Family Resemblances Among American Men of Science*.

(2) A temple containing busts and tablets of about 60 departed Americans. The elections are controlled by a learned committee and take place every ten years.

It is part of this theory that conification leads to evolution, that the apex becomes narrower and narrower i. e. 10 % should become 9 %, 8 % etc. Or on a broader basis of inclusion, 20 % should become 19 %, 18 % and so on. There is nothing surprising in this. If there is anything to prove a shooting up, an actual elevation of the constantly attenuated spike at the top, that is precisely what the theory of conification requires.

The Harvard Graduate records which will now be presented afford some proof that such evolution is taking place. The records of each class graduated from Harvard are kept very carefully as to occupation, marriage and number of children born and surviving. After twenty-five years out from college, a large volume is published as a special anniversary number. I listed the classes graduated in 1890, 1892, 1894, and 1898 into six groups; first the unmarried, second those married without children, third those with one living child, fourth those with two living children and so on to those with four or more living children.

The total number of graduates is well over a thousand. Each of these persons was looked for in *Who's Who in America*. Inclusion in this well known book of reference is an objective measure of success distinction, fame, eminence or whatever we may choose to call it. Of course this book is not an ideal standard of measurement, but at least we may feel assured that the names included are not paid for by the persons concerned, and the average achievement of these 25,000 men and women is undoubtedly greater than the average achievement of the millions who are not included. I have made a number of tests concerning the approximate validity of this reference book, comparisons with other encyclopaedias and so forth some of which was published in *Historiometry as an Exact Science* (5).

As to the figures themselves, the following table shows very clearly that there is some definite relationship between having living children and being in *Who's Who in America*. It is the bachelors who are distinctly less likely to arrive at this special standard of achievement.

It can be seen from the following table that the rise is not uniform for any single graduated class but that if the four are combined a sufficiently uniform rise is demonstrated. By adding the unmarried and married but childless, and dividing by two, we find that only 13.8 % of these persons appear in *Who's Who* against 16 to 18 for those with children.

NUMBER OF CHILDREN

	unmarried	0	1	2	3	4 or more
Class of '90.	15.2	19.40	22.92	18.27	24.45	14.26
» » '92.	14.75	14.10	18.75	22.81	20.76	18.92
» » '94.	6.25	20.00	13.33	18.07	22.45	25.45
» » '98.	2.63	12.26	12.64	8.00	8.00	13.73
Averages of above	9.71	16.44	16.91	16.79	18.92	18.09
Averages of the totals in each class	8.75	16.19	15.91	15.70	17.57	18.54
Averages of the two averages .	9.23	16.31	16.41	16.29	18.25	18.32

The averages of these figures contain some error because the graduating classes are never the same size. Therefore I have also obtained the averages for the totals, unmarried, no-child, one child etc. These figures are 8.75, 16.19, 15.91, 15.70, 17.57, 18.54. They also make a fairly good series of advances from left to right. This method while giving proper weight to the total number of graduates, gives too little weight to the *Who's Who* inclusion. For instance, the large class of '98 has not been out long enough to have but a scattering number in *Who's Who*, which small number can not be expected to be conformity with the rest and should not be given undue weight. It is best to average both of these minor errors. We then get the smoothest series of the three, showing how the truth, if present, struggles to show itself above the surface and succeeds in doing so the more we refine the method.

The figures are now 9.23, 16.31, 16.41, 16.29, 18.25, 18.32. If the fourth element were a little larger every one of the six would be a little larger than the one at the left.

This research the results of which were announced in the *World's Work* for November 1926 (page 32, article by A. E. WIGGAM) was taken up by J. C. PHILLIPS who was able to very satisfactorily confirm it by a somewhat different method. He did not use *Who's Who in America* at all but made his grades of « success » from private information and in consultation with others with whom he was at that time grading success for another purpose. His figures are as follows. They show a steady rise from left to right, grade (1) being the highest for « success » and showing the largest average of surviving children per capita, — being 2.02 (*Harvard Graduates Magazine*, June 1927).

Harvard graduates classes of 1901-19

Grades . .	V	IV	III	II	I
	74	1.03	1.54	1.76	2.02

The above figures give the probable number of surviving children per capita. My own figures are based solely on actual survivors. It appears from this, perhaps too slight, evidence that the best grade of Harvard Graduate is just about or almost reproducing itself. Certainly the better grades are Cong better than the worse and therefore as far as heredity is concerned there is evidence for survival of ability which means at least one factor working towards conification.

The next bit of evidence showing the same process at work comes from the British Isles. (9) (11) Here the family histories of the official aristocracy are to be found in the well known book of reference *Burke's Peerage*.

I have divided all the Peers (edition of 1921) into two groups; first those male lines traceable as early 1450, and second, those whose male lines are not traceable to such an early date. This bears on the average some relationship to the date of elevation to the Peerage; but that is another matter.

These in the first group are the peers who belong to the very old male lines, « old families », so called. They constitute about half of all the peers. Their family names are well known to everyone conversant with English history.

As regards their achievements which must be in a considerable degree due to a mixture of ability, vitality and ambition, they have all been placed in two groups. First, a comparatively small group who have done nothing or next to nothing in the way of rendering public service and second, a majority group whose public services appear to have been both genuine and continuous. Naturally there are border-line cases difficult to place, but these are not very numerous and I have been careful to adjust the doubtful cases in such a way that they would count against rather than in favor of my theory. Only those over 34 years of age have been included.

All who have been elected members of parliament or who have risen in the navy to the rank of commander or colonel in the army (not honorary colonel) also those who served in the Great War have been included in the « service » group as well as the few business and professional men. Both *Burke* and *Who's Who* have been consulted for each case. Generally speaking if there is anything in their biographies that can be called « service » they have been included in this group.

In spite of considerable liberality of inclusion in the « service » group there are about 68 among the peers of the newer families whose

achievements appear to be either nothing at all, or very inconsiderable. These have 138 living children which gives an average of 2.03.

There are about 274 peers of the newer families who come within the « service » group. These have 640 living children or an average of 2.33. An even greater rise is to be found in favour of the greater fecundity of the peers who have rendered « service » when we summarize the facts concerning the older families. Here about 70 peers with little or no public service to their credit have 131 living offspring or an average of 1.87 while 210 « service » peers have 610 living children. The average for living children here rises to the surprising height of 2.90.

These figures are only approximate and are as announced in « Science ». The corrected totals, virtually the same, show that 526 « service » fathers have 1283 living children, while 135 « non-service » fathers have 263. The averages are 2.44 for the « service » against only 1.95 for the « non-service », or one ratio is about 25 % greater than the other. There are over six hundred and fifty individuals on one side of our totals and over 1500 on the other. Considering the amount of difference the number of cases is sufficient to prove the main point of the research. For a detailed account see « The Journal of Heredity » (1928) in the article *Success Comes with Larger Families*. Here one may find a discussion of the influence of the errors. There are necessarily errors in all historiometric work. Reasons are given for believing that here the errors only work towards masking the truth. In other words, we have here the « paradox of historiometry » which is a fundamental rule. In this case one must conclude that the real relationship is greater than it appears to be and that the better and the best of the peers (from the standpoint of achievement) really have a higher average percentage of surviving offspring than they appear to have. The same applies to the Harvard Graduates (1).

This paradox of historiometry may be stated as follows: the worse we believe our material to be the more certain we may be of our conclusions provided the random errors may be supposed to have no bias towards these conclusions. (5) (6).

(1) Since writing this article am finding that the individuals in *Who's Who* (London) only average about 1.6 living offspring j the knights however average about 1.7 or perhaps more, thus bringing added proof.

SOCIAL POSITION AND INTELLIGENCE.

The next point in the series, all of which indicate the inevitable, forces working towards social and national conification, is that, by and large, these persons who are considered to be placed in the upper regions of a social cone really have a natural ability superior to the average.

That such is the fact may be accepted by many as so obvious as to require no proof, but since socialistically inclined persons often challenge this statement I shall give here in a foot note a few references. These all support the view that the socially superior possess more than the average amount of natural intellect. In some of these indeed in most of these, the part played by environment can not be separated, but in some of them it can. There can be no question but that genetic differences play a substantial role, and to that extent we have biological force working towards conification. As far as I know there are no researches showing that the upper social classes are not superior mentally to the working classes so called (1).

The British peerage to-day has lost much of its former political power but it still possesses a great deal of wealth, social and business prestige. The recent investigation of Professor H. LASKI shows that the average attendance in the House of Lords is small, but at the same time suggests considerable wealth and business activity.

(1) Some researches which in one way or another indicate that the upper social classes have more than their share of natural mental capacity may be briefly set down as follows: Publications of GALTON, CANDOLLE, ODIN, ELLIS, « Study of British Genius »; WOODS, *Heredity in Royalty, Heredity and the Hall of Fame* (4); « The Influence of Monarchs »; The Whethams, study of the British peers; Yerkes, Brigham and others in their analysis of the United States Army mental tests; ROSWELL H. JOHNSON's study of business men; McDougall on the correlation of intelligence and social status, and WOODS, *Conification of Social Groups*, both published in *Papers of Second International Congress of Eugenics*, (Baltimore, 1923); ALLEYNE IRELAND, *Democracy and the Human Equation*; L. STODDARD, *The Revolt Against Civilization*; A. E. WIGGAM, *The Fruit of the Family Tree* and *The Next Age of Man*. The last four books are not original researches but contain references to and discussions of « conification ». More recently TERMAN in his *Genetic Studies of Genius*, vol. I (1925) and CATHERINE COX in the same series vol. II (1927), edited by TERMAN, have brought added weight to the evidence that social position is correlated with *inborn* intelligence.

(Figures published in the Paris edition of *The Chicago Tribune*, March 26, 1928).

As a result of his investigation it is revealed that 412 members of the House have never spoken in debate. Indeed their average attendance since 1918 has been 56 and only on six occasions since then have more than 250 of them voted in a division.

On the contrary 242 of them own eight million acres in Great Britain and Ireland and represent the landed interest. Two hundred and seventy five are directors of business organisations such as insurance companies, banks, railways, engineering and shipping companies. While many of these may be mere figure heads, others have gained their wealth and fortune in business and for this reason have been raised to the peerage.

My own investigation shows that about 10 % of the peers have gained their elevation primarily through business channels. The other are presumably not very active as directors. We have no way of answering that question but the fact that so many are listed on the boards of directors shows that their names have a certain social and financial influence.

We have already seen that about four fifths of the peers (who averaged about sixty-one years in 1921) had some measurable public « service » to their credit. These various facts taken in their entirety show that the British nobility is still active, intelligent, and powerful in a social and financial way.

ACHIEVEMENT AND INTELLIGENCE.

Social position is correlated with intelligence. Just what the mathematical correlation is has not been, to my knowledge, worked out, though it might be at least with some approximation. Judging from the recent work of BRIGHAM on the « army tests » and TERMAN and COX on gifted children this correlation must be a very substantial one.

In most of these researches we have heredity and environment interwoven and not readily separated. Achievement which is due to a combination of these factors is doubtless more highly correlated with social position than is pure native intelligence.

Pure achievement, as judged by the records of history can be easily shown to be very closely related to social eminence. For instance if we start at the top of the old world social cone, i. e. royalty

living prior to the French Revolution, as many as twenty are worthy to rank with the greatest in all history in the arts of war and government. That is, they are about of the capacity of Peter the Great, Gustavus Adolphus, William the Conqueror etc. Twenty out of a population of 1000 or even out of 5000 or 10,000 is a proportion that can not be matched in any social class lower than royalty.

This superiority of old time royalty may on the face of it appear due to exceptional opportunity. For various reasons my own conclusion is that inborn difference due to the struggle for power, survival of the fittest, and accidental fortunate marriages form the best explanation.

Next to royalty, the nobles have in proportion to their populations produced the greatest number of eminent men. Royal «geniuses» have shown their ability only very rarely as poets or writers. They have been, when eminent at all, very practical in their outlook, — gifted as generals, great as organizers or administrators. They have been very closely bred, always from royalty or near-royalty, so this is to be expected biologically.

The nobles (who have not quite so much worldly success in their pedigrees) are more apt also to shine as philosophers, poets, scientists or writers, as well as soldiers, politicians and administrators. They have frequently reached eminence as men of thought, but it is to be noted that only very rarely have men of noble birth become famous in any of the arts strictly speaking, — that is where manual dexterity comes in as a necessary qualification, such as painting or performing on musical instruments; or indeed in surgery. It seems that here also we have a perfectly good explanation on grounds of natural inheritance. Only rarely have the nobles any skilled artisans in their immediate ancestry.

As a statistical specimen of what a population of noble and near noble people have done in the way of producing genius of a first class order I shall give the hitherto unpublished results I have just obtained from *Burke's Peerage and Baronetage*. This is the same book (1921) that was analysed for the surviving offspring of recent peers, but that investigation was limited to the living peers and their children. That included only a small fraction of the entire book. Whereas there were less than 2000 individuals involved in that research there are about 100,000 in this.

It might seem like a long drawn out task to deal with 100,000 names, but what I did was not a matter of much trouble, as it was a

bi-product during a general genealogical investigation of the older male-lines of the peers and baronets. I have simply taken down the names of very eminent men whose activities had little or nothing to do with politics, war, government or business.

Here are the names; they are all included in this book. There may be others which I have overlooked but it appears to be sufficient to find these alone. What ordinary population of 100,000, what small city or county can show anything like five or ten men of the eminence, fame, ability, genius, talent, or whatever one wishes to call it of this collection?

Scientists: Bacon, Boyle, Napier, Cavendish, Clerk-Maxwell, Rayleigh.

Literature: Philip Sidney, Coleridge, Byron, Shelley, (Tennyson) (G. B. Shaw).

The editors have strained a point in the inclusion of G. B. Shaw. He is distantly related to a family of baronets. If he were not already famous his name would undoubtedly be ignored by Burke. This tendency of Burke to tie up if possible with any form of success or reputation fortunately does not concern any of the other names. Tennyson is included by elevation to the peerage, not by birth though his family was an old and honorable one in Lincolnshire. All the others (ten in number) are there because they have to be, by accident of birth, in the male-lines of the present peers and baronets.

The name of Isaac Newton is in the book, but only as an uncle. Therefore **his name** can be dropped out of the reckoning. The aristocrats count ten where merely one is more than enough to prove their genius producing superiority. One name like Napier of Merchiston, the inventor of logarithms; or Boyle, or Henry Cavendish, (two of the greatest names in the history of chemistry), or Clerk-Maxwell, one of the greatest of physical mathematicians, would suffice. Probably a man of the genius of Clerk-Maxwell is at least of the rarity of one man in a million. So we have ten in a hundred thousand where at best we might expect one in a million. Or in other words, the aristocrats do, in proportion to random expectation, one hundred times as well or better.

HEREDITY AND ENVIRONMENT.

In most cases it is impossible to estimate the part played by opportunity in bringing to fruition the hidden seeds of genius. Even here one might argue until doomsday over each case separately or

all of them together. For instance, Henry Cavendish, one of the greatest of scientists, was an eccentric person who shunned human relationships. He was the grandson of a duke of Devonshire and possessed so much wealth that he never bothered to know how much it was. It is easy to say that without such wealth he could not have carried out his experiments. Very likely not; but we do not know that if he had been poor he might have distinguished himself just as much in some less expensive form of scientific amusement, mathematics, for example.

Francis Bacon on the contrary was always in debt, yet he found time to write upon subjects not at all popular. Personally I do not believe that opportunity has much of anything to do with the development of genius but my reasons are derived from data of a somewhat different kind, not from the study of geniuses directly.

In the data collected by Sir Francis Galton it is also usually impossible to separate the environmental factors, though his study of identical and non-identical twins gives us a rough beginning towards the solution of this problem. The distribution of the data in the history of the royal families convinced me some twenty-five years ago that genetic differences and not differences in opportunity were by far the chief factors in causing important *differences* in human achievement.

Now within the last few years we have the great mass of evidence springing originally from the discovery of Binet that intelligence in childhood is a fixed quotient, that a so called « dull child » of ten years of age is almost the same as one who has the normal mind of a child, say six or seven years of age. These intelligence tests which have now been carried out on millions of persons, adults as well as children have been themselves tested and rearranged and corrected.

All this makes the recent work of LEWIS M. Terman on the problem of genius production very convincing. I will briefly give a report of his figures.

LEWIS M. TERMAN: *Genetic Studies of Genius*, Vol. I, *Mental and physical Traits of a Thousand Gifted Children* (1925).

SUMMARY	Proportion among fathers of Gifted Children	Proportion in population of Los Angeles a San Francisco, 1910 census	Per cent of quota among fathers of Gifted Children
Professional Group. .	29.1 %	2.9 %	1003 %
Public Service Group.	4.5 %	3.3 %	137 %
Commercial Group. .	46.2 %	36.1 %	128 %
Industrial Group . . }	20.2 %	57.7 %	35 %
Artisans " }			

Total enrollment in Grades 1-8 in schools canvassed 1921-22; 174,274

In the industrial group, only one « laborer », or this class furnished but 1/77th of its quota.

TERMAN's figures concern the parentage, occupation and thus the social position of a large group of gifted children. These children in the public schools of Los Angeles, San Francisco and Oakland California though aged from five to thirteen (with an average age about nine) had an average mental age around fourteen or fifteen.

The fathers of 29.1% of these children belonged to the various learned professions. By a second method TERMAN finds this figure 31.4%. Their expected quota in terms of the population was 2.9%. Only one child was the offspring of a laborer. The artisan class also failed to produce its quota. In the lower right hand corner of the table we see this is 35% instead of 100, the full quota.

These figures of TERMAN are not very different from those of CATTELL on the parentage of leading American men of science or those of EDWIN L. CLARKE in his study of American Men of Letters or the earlier figures of GALTON, CANDOBLE, ELLIS *et al.* The very important distinction is that these figures of TERMAN are on young children.

TERMAN says: «It has often been argued that this superiority in achievement should be credited for the most part to the larger opportunity for achievement enjoyed by members of the favored classes. Our data show that individuals of the various social classes present these same differences in early childhood, a fact which strongly suggests that the casual factor lies in original endowment rather than in environmental influences ».

But the argument is even stronger than TERMAN puts it. I shall put the argument as follows. These children are around nine years

of age. It might be possible to say that these being brought up in families where bright conversation is going on have a better chance than those say in the families of poor working men. But we know from other investigations that this intelligence quotient (I. Q.) is the same in the very young as it is when these same children reach the age of nine. In other words the (I. Q.) does not move. It should move if it were due to differences in the environment, and advance with advancing years. Therefore the (I. Q.) is rightly regarded as a measure of natural or inborn intelligence.

To account for these facts of Terman's, the children of professional classes must be naturally superior mentally. There is no way to get around this argument.

Again we can now look back at the mass material in the old researches and see if there is any decline in the percentages from the upper classes. In this investigation of Terman's there is some decline from 43.1% and 49.2% given by Cattell and by Clarke, as being the proportions from the professional classes; (in Cattell's data, 3% is expected). Cattell deals with 885 American scientists, Clarke with 666 American men of letters. These standards of intelligence are certainly higher than those for the California school children. This may account for the difference.

I think one can correctly assume that the standard for the 885 leading American scientists and also the 666 American Men of Letters is at least as high as that for inclusion in *Who's Who in America*. This book contains over 20,000 names. Therefore nearly all these names in Cattell and Clarke should be also in *Who's Who in America* or good enough for inclusion in that book. Now the standard of *Who's Who in America* has been rather accurately worked out by D. R. Brimhall in *Family Resemblances Among American Men of Science*, « American Naturalist », 1923. He estimates the chances of a man of the generality getting into *Who's Who in America* as one in 824. He has also computed the average age of first inclusion in this same standard book of reference as about 49 years.

The gifted children selected by Terman are not as gifted compared with ordinary children as the men in *Who's Who in America*. This is shown by the fact that Terman has taken out of a general school population of 174,274 children a group of about 700 for his « main search ». This is about one in 249. The *Who's Who* standard was found to be about one person in 824 of the total population, which figure is over three times as great as the other.

These children in the Terman research come from the cities of Los Angeles, San Francisco and Oakland. The standard for exceptional intelligence is somewhat higher for cities than for districts in the United States outside of cities, which may alter the conclusions a little, but it seems safe to say that the standard of the gifted children is at least somewhat lower than for those listed by CATTELL and CLARKE.

It would be very interesting to know if the top cream of the gifted children, say the upper third showed a percentage of professional parentage markedly higher than 29.1 or 31.4. If the standard were higher the percentage would almost surely rise. If it rose to about 45 we might then conclude that the factor for environment in the CATTELL and CLARKE researches was a small one. At any rate a considerable part of TERMAN's differences (roughly 30) instead of roughly 3, must be caused by a double correlation, first intelligence and social status; second a correlation of intelligence between successive generations. And already we know that all the facts can not be as they are save on the theory of a tremendous control lying in the nucleus of the primordial fertilized ovum, the original cell from which each human being springs.

DIMINISHING ENVIRONMENT.

This germ-plasm control which is chiefly centered in the chromosomes is more important in the higher forms of life than it is in the lower. It is probably of maximum importance in controlling the morphological development of the human brain. Since the theory of conification depends on the theory of hereditary differences, — and the more we believe in heredity, the more we must believe in conification, — it is worth-while to say a word about this Law of Diminishing Environmental Influences.

As we come up from the plant world through the low metazoa to the higher invertebrates, and by another route to the fishes, amphibians, birds, and mammals, and finally to man with his highly complex brain, we find a more or less regular decrease in the power of environment to control the development of the organism. The higher creatures have a greater power to choose their own environment. Also the higher tissues are less subject to regeneration. The proof of this is too long a story to be given here. Those who may be interested are referred to my studies on this subject which were published in «The Popular Science Monthly» (1910) (3).

BIOLOGICAL AND FINANCIAL INHERITANCE.

The strength of heredity is one of the principal supports for the theory of aristogenesis (national conification). The other chief support is that among all races where conification has occurred there has been an abundance of accumulated wealth. This means that in a primitive, savage or hunter stage of society, as for instance among the tribes of the North American Indians, very little aristogenesis could develop. In Central America and in Peru, in the fertile river valleys of the Nile and of the Euphrates, such conification could and did take place. Powerful dynasties were formed and great caste differences established. Where pastoral and agricultural life can be developed easily and on a large scale there is every chance for the developement of inherited wealth. Here « father right » takes the place of the more primitive « mother right »; the wealthy and successful tend more and more to mate their children among themselves, and so the whole process takes place. The middle classes tend to diminish. The curves representing the financial, social, and intellectual differences all become divided more and more into two portions. There is a broad flat base representing something over 90 % of the population (the proletariat), with a high pointed superstructure representing a very small per cent, the aristocracy. The junction between the two parts of the curve tends to become a right angle.

As time goes on these national cones all tend to break down for one reason or another. They become exceedingly thin and pointed at the top; perhaps too delicate to endure. Sometimes these aristocracies are destroyed by foreign wars, sometimes by forces from within. Why they disappear is another problem. The main idea in the present article is to discuss not only why they should form, from *a priori* reasons, but more especially to show that we already have from eight different directions indications that they actually do form. This aristogenesis is associated with a certain amount of inevitable mental evolution. All this must have been of great importance in producing civilization. The unconified races have remained uncivilized. The highly conified races have not always survived, but without such caste differentiation, which fortunately is biological and cannot be prevented, it would seem that human history would never have been written.

1. *The Correlation between Mental and Moral Qualities*. « Popular Science Monthly », 1903 (now called « Scientific Monthly »).
 2. *Mental and Moral Heredity in Royalty*. New York, 1906.
 3. *Laws of Diminishing Environmental Influence*. « Popular Science Monthly » (1910) (now called « Scientific Monthly »).
 4. *Heredity and The Hall of Fame*, « Popular Science Monthly » 1912 (now called « Scientific Monthly »).
 5. *Historiometry as an Exact Science*. « Science N. S. », vol. 33, No. 850, April 14, 1911, pp. 568-574. Reprinted in the appendix in *The Influence of Monarchs*, 1913.
 6. *The Influence of Monarchs*, New York, 1913.
 7. *Significant Evidence for Mental Inheritance*, « Journal of Heredity ». Washington, D. C. 1917.
 8. *The Conifcation of Social Groups: Evidence from New England Families*; pp. 312-328 in « Eugenics, Genetics and the Family » vol. I, « Scientific Papers of the Second International Congress of Eugenics held at the American Museum of Natural History, New York, September 22-28, 1921. » Baltimore 1923.
 9. *The Survival of Ability*. « Science », Nov. 4, 1927.
 10. *Is the Human Mind Evolving?* « Journal of Heredity », July 1927.
 11. *Successful Men Have Larger Families*. « Journal of Heredity », 1928.
-

RIUNIONI E CONGRESSI.

La prima Assemblea generale dell'Unione mondiale per lo studio dei problemi della popolazione.

Nei giorni 4-6 luglio corrente è stata tenuta a Parigi la prima Assemblea Generale dell'Unione Mondiale per lo studio dei problemi della popolazione. I suoi compiti principali erano la discussione e l'approvazione dello statuto della Unione e la elaborazione di un piano di lavoro per i prossimi anni.

In merito al primo punto, è da ricordarsi che il Congresso della Popolazione, tenuto il 3 settembre 1927 a Ginevra, aveva affidato il compito della preparazione di uno Statuto della costituenda Unione ad un Comitato Provvisorio, eletto nel seno dell'Assemblea stessa, e allargato per cooptazione. Questo Comitato Provvisorio, composto di 15 membri, rappresentanti i singoli Comitati Nazionali, era presente a Parigi quasi al suo completo. E precisamente sono intervenuti: il presidente prof. RAYMOND PEARL, ed i membri proff. GINI (Italia), BERNARD (Francia), CREW (Inghilterra), EAST (Stati Uniti d'America), MAHAİM (Belgio), MALLET (Inghilterra), RAPPARD (Belgio); assisteva pure il dott. SÖREN-HANSEN (Danimarca) in rappresentanza del membro LUNDBORG (Svezia) e il dott. METHORST (Olanda). In complesso sono intervenuti circa 100 delegati, che rappresentavano i principali paesi del mondo.

La delegazione italiana, sotto la presidenza del prof. GINI, era composta dei seguenti membri: proff. BOLDRINI, dell'Università Cattolica di Milano, CASTRILLI dell'Università Benito Mussolini di Bari, SAVORGNaN dell'Università di Pisa, e il sig. VALENZIANI, segretario del Comitato.

Dopo l'elezione del prof. BERNARD alla carica di presidente dell'Assemblea, il prof. PEARL, in nome del Comitato Provvisorio, fece una relazione dettagliata sulla attività svolta dal Comitato stesso durante i suoi dieci mesi di vita e sul progetto di Statuto che fu pre-

parato per esser sottoposto all'Assemblea. Grazie alla preparazione accurata del progetto, questo fu approvato con modificazioni di poca importanza.

Dato che con tale deliberazione il progetto divenne lo Statuto dell'Unione Mondiale, crediamo opportuno esporre qui brevemente i suoi punti essenziali.

L'art. 1 dichiara essere scopo dell'Unione di favorire gli studi scientifici intorno ai problemi della popolazione, tenendosi però estraneo ad ogni discussione di indole religiosa, morale e politica. Gli articoli seguenti stabiliscono che membri della Unione sono i singoli Comitati Nazionali, i quali devono esser costituiti sotto la responsabilità di personalità autorizzate dalla Unione stessa, oppure da istituzioni scientifiche nazionali. Organi dell'Unione saranno:

1) l'Assemblea Generale, composta dei delegati dei Comitati Nazionali;

2) il Consiglio dei Delegati, uno per ciascun Comitato Nazionale, che ha soprattutto funzioni di controllo;

3) il Comitato Esecutivo, composto di un presidente e tre vicepresidenti. L'amministrazione è diretta da un segretario permanente.

Approvato lo Statuto, si procedette alla elezione del Comitato Esecutivo; risultarono eletti PEARL, presidente, BERNARD, GINI, MALLET, vicepresidenti.

Dopo una discussione generale sulle proposte presentate dai singoli delegati, venne nominata una commissione coll'incarico di designare gli oggetti di studio per gli anni venturi. Tale commissione propose di affidare a ciascuno di tre distinte commissioni scientifiche lo studio di uno dei tre seguenti problemi: 1) popolazione e mezzi di sussistenza; 2) riproduttività differenziale, fecondità e sterilità; 3) statistiche delle razze primitive. Approvata la proposta si procede alla elezione delle tre commissioni, lasciando a ciascuna di esse la facoltà di chiamare alla collaborazione anche persone non designate dall'Assemblea.

Per assicurare alle commissioni una certa continuità di criteri nello studio dei singoli problemi, esse rimarranno in carica per sei anni.

A membri delle singole commissioni risultano eletti:

1) EAST (Stati Uniti) presidente, MARCH (Francia) Vicepresidente, BAUER ERWIN (Germania), BAKER O. E. (Stati Uniti), BRIZI (Italia), HENRY (Belgio), REW (Inghilterra) membri;

2) CREW (Inghilterra) presidente, AZNAR (Spagna) Vicepresidente, CARR-SAUNDERS (Inghilterra), EDIN (Svezia), FURSTER (Francia), GINI (Italia), GROTHJAHN (Germania), MARCH (Francia), MAHAIM (Belgio), METHORST (Olanda), PEARL (Stati Uniti), SAVORGNAN (Italia), STEVENSON (Inghilterra), WILCOX (Stati Uniti), ZAHN (Germania), ZURUKZOGLU-KUNZ (Grecia) membri;

3) GINI (Italia) presidente, MALINOWSKI (Inghilterra) Vicepresidente, HRDLICKA (Stati Uniti), PITT-RIVERS (Inghilterra), SCHLAGINHAUFEN (Svizzera), SCHMIDT (Austria), ROQUETTE-PINTO (Brasile) membri.

Come sede della Unione viene designata Parigi.

L'Assemblea manifestò il desiderio di scegliere come sede del prossimo Congresso Roma. Il Presidente della delegazione italiana esprime la sua viva soddisfazione per tale scelta, riservandosi di sottoporla al Comitato e al Governo Italiano, i quali successivamente hanno dato ben volentieri la loro accettazione.

Si procedette finalmente alle relazioni dei singoli Comitati Nazionali, dalle quali risultò che alcuni di essi, come quello dell'Italia, degli Stati Uniti, della Danimarca, hanno già condotto a termine i lavori preparatori e stanno per iniziare la loro attività scientifica, mentre altri sono in via di costituzione o appena costituiti. Oltre che nei paesi suddetti, si è già proceduto alla formazione di comitati nazionali in Inghilterra, Francia, Spagna, Olanda, Svizzera, Belgio, Brasile, Svezia, Grecia.

Accolto su proposta di Sir Mallet un voto di ringraziamento all'indirizzo del presidente dell'Assemblea prof. Bernard e, su proposta del prof. Boldrini, un altro all'indirizzo del presidente della Unione prof. Pearl, il congresso chiuse i suoi lavori il giorno 6 luglio.

Con questa assemblea si chiude per l'Unione Mondiale il periodo di preparazione ed essa può ormai passare allo studio dei problemi che ha scelto dal quale è lecito attendersi un contributo notevole alla scienza della popolazione.

Congresso internazionale dei Matematici.

Sotto gli auspici della R. Università si svolgerà in Bologna dal 3 al 10 settembre c. a. il Congresso Internazionale dei Matematici, che avrà a patrono S. M. il Re ed a Presidente d'onore S. E. il Capo del Governo.

Il Comitato ordinatore e la Commissione esecutiva, rispettivamente presieduti dal Rettore dell'Università e dal prof. Pincherle, hanno chiamato a convegno tutti i cultori delle scienze matematiche pure ed applicate; e le adesioni e comunicazioni pervenute od annunciate fanno prevedere che il più lieto successo arriderà alla bella iniziativa dell'Ateneo bolognese.

La seduta solenne di apertura avrà luogo nell'Aula magna dell'antico Archiginnasio in Bologna, e quella di chiusura si farà in Firenze nel Salone dei Duecento, a Palazzo Vecchio.

Il Congresso sarà diviso in sette sezioni: 1) Aritmetica, algebra, analisi; 2) Geometria; 3) Meccanica, astronomia, geodesia, geofisica, fisica matematica, fisica teorica; 4) Statistica, economia matematica, calcolo delle probabilità, scienza attuariale; 5) Ingegneria e applicazioni industriali; 6) Matematiche elementari, questioni didattiche, logica matematica; 7) Filosofia, storia della matematica.

Alla IV Sezione, che si annuncia particolarmente interessante per l'autorità e per il numero degli scienziati che hanno promesso il loro intervento, sono state fra le altre annunciate pel tramite del prof. GINI, uno degli introduttori della sezione stessa, le seguenti comunicazioni:

D. ARANY (Budapest), *Generalizzazione del problema della durata del giuoco per tre giuocatori.*

W. DOBBERNACK (Berlin), *Errori sistematici e casuali nel calcolo dei numeri indici.*

B. DE FINETTI (Roma), *Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio.*

R. A. FISCHER (Harpenden), *On a property connecting the X^2 measure of discrepancy with the method of maximum likelihood.*

L. GALVANI (Roma), *Estensioni del concetto di media ed applicazioni allo studio della variabilità di una serie statistica.*

- A. GULDBERG (Oslo), *Sulla funzione gamma.*
- E. J. GUMBEL (Berlin), *Das Zufallgesetz des Sterbens.*
- B. LAGUNOFF (Kiew), 1. *Aufstellung einer Formel für den Arbeitsleistungsindex.*
 2. *Von dem Zusammenhange der Preise der Arbeitsleistung etc.*
- L. MARCH (Paris), *Note sur la corrélation.*
- E. C. MOLINA (New York), *Application to the Binomial Summation of a Laplacian Method for the Evaluation of Definite Integrals.*
- J. NEYMAN (Warszawa), *Contributo alla teoria delle probabilità delle ipotesi.*
- W. ROMANOWSKY (Tashkent), 1. *Sur le calcul des moments des moyennes des fonctions des variables aléatoires pour les épreuves indépendantes.*
 2. *Sur la généralisation des courbes de Pearson.*
 3. *Sur la comparaison des moyennes des variables aléatoires dépendantes, pour les épreuves indépendantes.*
- E. SLUTSKY (Moskva), *Ueber die kompakten zufälligen Funktionen.*
- S. D. WICKSELL (Lund), *Aspetti matematici dei problemi della popolazione.*

Hanno poi annunciato, come più o meno probabile, la loro partecipazione: HENDERSON (New York), J. W. GLOWER (Michigan), G. PIETRA (Padova), H. L. RIETZ (Jowa).

Il Congresso, oltre ad avere un alto interesse scientifico, offrirà l'attrattiva di solenni ricevimenti da parte del Governo Nazionale e delle città di Bologna, Firenze, Ravenna, Ferrara; di escursioni in queste città; di visite ad importanti lavori di ingegneria sull'Appennino tosco-emiliano e all'impianto idroelettrico del Lago di Ledro.

L'adesione dovrà essere inviata alla Commissione esecutiva del Congresso Internazionale dei Matematici, presso l'Istituto Matematico della R. Università di Bologna (Italia); per sua parte, il Comitato ordinatore provvederà affinché, su richiesta degli interessati e mediante apposito ufficio, siano fornite tutte le informazioni inerenti al soggiorno in Bologna, alloggi, riduzioni ferroviarie, ecc.

La XVII Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze.

Avrà luogo in Torino dal 15 al 21 settembre prossimo, nei locali della R. Università. Lo stesso Rettore, prof. POCHETTINO, presiede il Comitato ordinatore del Congresso.

Saranno presidenti di Sezione della Classe C i professori: M. R. P. AGOSTINO GEMELLI, CORRADO GINI, GABRIELE GOIDANICH, ETTORE STAMPINI.

Al discorso inaugurale del Presidente della Società, prof. BOTTAZZI, seguirà quello del GINI su uno dei problemi più appassionanti dei nostri giorni, e cioè sul problema della popolazione. Come aventi più generale interesse, citiamo poi fra i molti altri discorsi annunciati quelli di: P. GEMELLI, *Le più recenti applicazioni della Psicologia alla selezione e orientazione dei lavoratori*; S. E. on. BOTTAI, *La carta del lavoro*; on. avv. OLIVETTI, *Lavoro e industria*; S. E. gen. PORRO, *Le basi scientifiche della geografia militare*; S. E. GIANNINI, *Diritto aeronautico*; prof. VERCELLI, *Il problema della previsione del tempo*; prof. ALMAGIÀ, *I problemi attuali della geografia scientifica*, prof. ARMELLINI, *Gli universi isolati secondo le più recenti ricerche*; prof. P. ENRIQUES, *Le conoscenze attuali su le teorie evoluzionistiche*, ecc.

Sono anche all'ordine del giorno i discorsi del col. GIACCHI, del prof. GARINO CANINA e dell'on. prof. VOLPE sulla grande guerra al nostro fronte e sulla storia della Monarchia Sabauda, che daranno modo di degnamente onorare Casa Savoia e il glorioso Esercito, di cui Torino commemora appunto in questi mesi i fastigi e le vittorie.

Sono infine annunciate interessanti escursioni al Moncenisio, a Superga, a Stupinigi, in Val d'Aosta, e, per chi lo desidera, anche una visita all'Istituto Mosso di Col d'Olen, diretto dal prof. HERLITZKA, visita che avrà luogo nei tre giorni immediatamente precedenti il Congresso.

Tutta la corrispondenza a questo relativa va diretta alla Presidenza del Comitato ordinatore (Regia Università, Torino, Via Po 15).

Primo Congresso nazionale di Scienza delle Assicurazioni.

Per iniziativa del R. Istituto Superiore di Scienze economiche e commerciali e col concorso della Reale Mutua Assicurazioni di Torino, del Ministero della Economia Nazionale, dell'Istituto Nazionale delle Assicurazioni, dell'Istituto Centrale di Statistica e di altri Enti, avrà luogo in Torino, dal 20 al 23 settembre p. v., il Primo Congresso Nazionale di Scienza delle Assicurazioni.

Il Comitato esecutivo, pur lasciando ai singoli Congressisti la facoltà di presentare comunicazioni su argomenti di loro scelta, ha proposto come temi generali del Congresso i seguenti: 1) Disciplina giuridica dell'industria delle assicurazioni. Trattamento fiscale delle assicurazioni. 2) L'assicurazione dei crediti nella economia degli stati. 3) Insegnamento della scienza delle assicurazioni. 4) Disciplina scientifica e professionale dell'attuariato in Italia. 5) Tavola di mortalità degli assicurati italiani.

Lo stesso Comitato ha stabilito di dividere il Congresso in tre sezioni: a) Matematica attuariale, statistica; b) tecnica generale. istruzione assicurativa, organizzazione aziendale; c) Medica, legale, economica, sociale.

Ha, inoltre, nominato un grande Comitato scientifico-tecnico per l'esame e l'accoglimento delle memorie presentate e per la loro assegnazione alle Sezioni.

Il testo delle relazioni e comunicazioni deve pervenire in duplice copia dattilografata, non oltre il 15 agosto, alla presidenza del Comitato scientifico tecnico, Via Cittadella n. 1, Torino; schede e quote d'iscrizione dovranno invece essere inviate alla Segreteria amministrativa del Congresso (presso la Società Reale Mutua Assicurazioni, Via Orfane 6, Torino).

